D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 14.1.2020: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza per una serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(ii) Quale é il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$?

Risposta

(i)

(ii) Poichè $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \neq 0$, la serie a termini positivi necessariamente diverge

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di derivata parziale rispetto y per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Enunciare il Teorema di Fermat per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Risoluzione

(i)

(ii)

Esercizio 1 [3 punti]

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi e divergente. Allora

[a] $\sum_{n=0}^{\infty} 1/a_n$ converge;

[b] $\forall \epsilon > 0, \exists m > 0$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}, n > m$ si ha $a_n > \epsilon$

[X] $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m > n$ tale che $\sum_{n=0}^{m} a_n > 3$;

[d] $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, allora, per definizione, $\lim_{m\to\infty} S_n = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n = +\infty$, quindi $\sum_{n=0}^{m} a_n > 3$ definitivament

Esercizio 2 [3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e pari. Allora

[a] f ha un estremo assoluto in 0 ;

[b] f é derivabile in 0 e $f'(0) = 0$;

[c] f é limitata;

[X] $\forall a > 0, \exists M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M \ \forall x \in [-a, a]$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè f è continua in $\mathbb{R}$, allora è limitata in ogni intervallo chiuso e limitato $[-a,a]$, dal Teo. di Weierstrass

Esercizio 3 [3 punti]

Sia $f(x) = x \ln^2(x)$. Allora

[a] f ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$

[b] f é concava

[c] f é crescente

[d] f ha un punto di flesso

Risoluzione (giustificare la risposta)

$f'(x) = \log^2(x) + 2\log(x)$, $f''(x) = \frac{2}{x}(\log(x)+1)$

e quindi $f(x)$ ha un flesso in $x = e^{-1}$

Esercizio 4

[4 punti]

Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = t^2 e^{y(t)} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Risoluzione

Eq. a variabili separabili $y'(t) = f(t)\, g(y(t))$ con $f(t) = t^2$, $g(y) = e^y$. Sono verificate le condizioni di esistenza e unicità locale

1) Sol. stazionarie: $g(\alpha) = e^{\alpha} \neq 0$, quindi non esistono sol. stazionarie

2) Separazione variabili

$$\int_{\alpha}^{y(t)} e^{-r}\,dr = \int_0^t r^2\,dr \iff e^{-\alpha} - e^{-y(t)} = \frac{t^3}{3} \iff$$

$$e^{-y(t)} = \left(e^{\alpha} - \frac{t^3}{3}\right)^{-1} \iff y(t) = \ln\left(e^{\alpha} - \frac{t^3}{3}\right)^{-1}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$$

Risoluzione Riscrivo il limite come

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^2 \sin(x)}$$

$x^2 \sin(x) \sim x^3$; quindi sviluppo numeratore 3 ordine

$$x - \sin(x) = x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{6}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^2 \sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6}}{x^3} = \frac{1}{6}$$

Esercizio 6

[5 punti]

Trovare i punti critici della funzione $f(x,y) = (x+y+\frac{5}{2})e^{x^2+y^2}$ e classificarli.

Risoluzione

$f(x,y)$ è di classe C^2 in $\mathbb{R}^2$. Quindi

$$Df(x,y) = \left(e^{x^2+y^2} + \left(x+y+\frac{5}{2}\right)e^{x^2+y^2}\cdot 2x,\ e^{x^2+y^2} + \left(x+y+\frac{5}{2}\right)e^{x^2+y^2}\cdot 2y\right)$$

$$= (0,0) \iff$$

SOTTRAENDO LE DUE EQ.

$$\begin{cases} 1 + 2x\left(x+y+\frac{5}{2}\right) = 0 \\ 1 + 2y\left(x+y+\frac{5}{2}\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (2y-2x)\left(x+y+\frac{5}{2}\right) = 0 \\ 1+2y\left(x+y+\frac{5}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

1°

$$\begin{cases} x = y \\ 1 + 2y\left(2y+\frac{5}{2}\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} P_1 = (-1,-1) \\ P_2 = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

$\boxed{\text{PUNTI CRITICI}}$

2°

$$\begin{cases} x+y+\frac{5}{2} = 0 \\ 1 = 0 \end{cases}$$

(impossibile)

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} e^{x^2+y^2}\left[\left(x+y+\frac{5}{2}\right)(4x^2+2)+4x\right] & e^{x^2+y^2}\left[4xy\left(x+y+\frac{5}{2}\right)+2x+2y\right] \\ e^{x^2+y^2}\left[4xy\left(x+y+\frac{5}{2}\right)+2x+2y\right] & e^{x^2+y^2}\left[\left(x+y+\frac{5}{2}\right)(4y^2+2)+4y\right] \end{bmatrix}$$

$$Hf(-1,1) = \begin{bmatrix} -e^2 & -2e^2 \\ -2e^2 & -e^2 \end{bmatrix}$$

Punto di sella

$$Hf\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{8}}\cdot\frac{7}{2} & -e^{\frac{1}{8}}\cdot\frac{1}{2} \\ -e^{-\frac{1}{8}}\cdot\frac{1}{2} & +e^{-\frac{1}{8}}\cdot\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Punto di minimo locale