D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 4.6.2018: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di integrabilità in senso improprio per $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

(ii) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}\sin(\frac{1}{x})$ é integrabile in senso improprio in $(1, \infty)$?

Risposta

(i)

(ii) $f(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ per $x \rightarrow +\infty$, quindi f è integrabile in $(1, +\infty)$ per $\alpha + 1 > 1 \iff \boxed{\alpha > 0}$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema di Fermat per $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

(ii) Mostrare con un esempio in $\mathbb{R}^2$ che un punto critico non necessariamente é un punto di estremo locale

Risposta

(i)

(ii) $f(x,y) = x^2 - y^2$

$Df(x,y) = (2x, -2y)$ quindi (0.0) è un punto critico ma non è un punto di estremo locale

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $a_n = \sin(\frac{\pi n}{2}) \cdot \ln(1+n)$. Allora la successione $\{a_n\}$

☐ a diverge
☐ b é limitata;
☐ c converge;
☒ d verifica: $\forall \epsilon > 0$, $\forall n > 0$, $\exists m > n$ t.c. $|a_m| < \epsilon$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 2K \\ (-1)^K \ln(1+n) & n = 2K+1 \end{cases}$$

quindi la risposta corretta è $\boxed{d}$ poichè $\forall n$ se $m = 2K > n$, allora $|a_n| = |0| < \varepsilon$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f \in C^1([0,1])$ tale che $f(0) = 0$, $f(1) = 2$. Allora

☐ a $\exists x \in [0,1]$ t.c. $f'(x) = 2$;
☐ b $f'(0) \geq 0$;
☐ c f é invertibile;
☐ d f é concava.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal teorema di Lagrange $\exists x \in (0,1)$ t.c

$$f'(x) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 2$$

Esercizio 3

[3 punti]

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é una funzione regolare e tale che $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$, allora

☐ a x_0 é un massimo locale di f;
☐ b x_0 é un minimo locale di f;
☐ c x_0 non é un un punto di flesso di f;
☐ d f é monotona in un intorno di x_0.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè la prima derivata non nulla in x_0 è dispari allora x_0 non è un punto di estremo locale e quindi f è monotona in un intorno di x_0

Esercizio 4

[4 punti]

Determinare $a, b, c \in \mathbb{R}$ in modo che sia applicabile il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x < 0 \\ cx + 3 & x \geq 0 \end{cases}$$

nell'intervallo $[-1, 1]$.

Risoluzione

Dobbiamo verificare che $f \in C^0([0,1])$, f è derivabile in $(0,1)$ e $f(-1) = f(1)$

- f continua se $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) \iff 3 = b$
- f derivabile se $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) \iff c = a$
- $f(1) = f(-1) \iff c + 3 = 1 - a + b$ quindi

$$\begin{cases} b = 3 \\ c = a \\ a - b + c = -2 \iff 2a = 1 \iff a = c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Esercizio 5

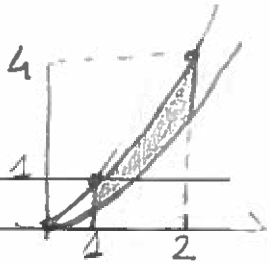
[4 punti]

Calcolare

$$\iint_D \frac{x}{y^2}\, dx dy$$

ove $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2,\ \frac{x^2}{2} - y \leq 0,\ y - x^2 \leq 0\}$.

Risoluzione



$D = \{(x,y) : x \in [1,2],\ \frac{x^2}{2} \leq y \leq x^2\}$

$$\iint_D \frac{x}{y^2}\, dx\, dy = \int_1^2 \int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} \frac{x}{y^2}\, dy\, dx = \int_1^2 \left[-\frac{x}{y} \right]_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x} \right) dx =$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \ln(2)$$

Esercizio 6

[4 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{|x|} \cdot e^{-x}$.

Risoluzione

- $D(f) = \mathbb{R}$, f continua in $\mathbb{R}$
- segno : $f \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Derivata prima

f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e

$$f'(x) = -\frac{e^{-x} x (2x-1)}{2|x|^{3/2}} \quad \text{per } x \neq 0$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty$ (f non derivabile in 0)

$f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{se } x \in (0, \frac{1}{2}) \\ f'(x) < 0 & \text{se } x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, +\infty) \end{cases}$$

quindi $x = \frac{1}{2}$ punto di massimo locale