INGEGNERIA CIVILE - COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA
SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 20-06-2014

ESERCIZIO 1
Calcolare

$$\iiint_\Omega (3z^2 + y^2)dxdydz$$

dove $\Omega = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \geq z^2, 0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\right\}$.

SOLUZIONE
Usando le coordinate cilindriche si trova che:

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega (3z^2 + y^2)dxdydz =& \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}/2}\int_{-\rho}^{\rho}(3z^2 + \rho^2\sin^2\theta)\rho dz d\rho d\theta\\ =& \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}/2} 2\rho^4(1 + \sin^2\theta)d\rho d\theta\\ =& \int_0^{2\pi}\frac{1}{10\sqrt{2}}(1 + \sin^2\theta)d\theta\\ =& \frac{3\pi}{10\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Sviluppare in serie di Fourier di soli seni nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi/4, \\ 0 & \pi/4 < x < \pi/2, \\ x & \pi/2 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

esaminando la convergenza della serie ottenuta. E' richiesto anche il disegno dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE
La funzione è discontinua e quindi la convergenza non sarà totale. Si ha:

$$\begin{aligned}b_k =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/4}\sin kx dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} x\sin kx dx\\ =& \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\pi/4} + \frac{2}{\pi}\left[-x\frac{\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2}\right]_{\pi/2}^{\pi}\\ =& -\frac{2\cos\frac{k\pi}{4}}{k\pi} + \frac{2}{k\pi} - \frac{2(-1)^k}{k} + \frac{\cos\frac{k\pi}{2}}{k} - 2\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k^2\pi}.\end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{2\cos\frac{k\pi}{4}}{k\pi}+\frac{2}{k\pi}-\frac{2(-1)^k}{k}+\frac{\cos\frac{k\pi}{2}}{k}-2\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k^2\pi}\right]\sin kx$$

$$=\begin{cases} f(x) & 0<x\le\pi,\ x\neq\pi/4,\pi/2 \\ 1/2 & x=\pi/4 \\ \pi/4 & x=\pi/2 \\ 0 & x=0,\pi. \end{cases}$$

ESERCIZIO 3
Risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=6t & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0)=0 & x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0)=\log(1+x^2) & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare che la funzione ottenuta è la soluzione del problema.

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione delle onde in dimensione 1. Applicando la formula di D'Alembert troviamo:

$$\begin{aligned} u(x,t)=&\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\log(1+y^2)dy+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+s}^{x+t-s}6sdyds \\ =&\frac{1}{2}\left[y\log(1+y^2)-2y+2\arctan y\right]_{y=x-t}^{y=x+t}+\int_0^t(6st-6s^2)ds \\ =&\frac{1}{2}\left\{(x+t)\log[1+(x+t)^2]-4t+2\arctan(x+t)-\log[1+(x-t)^2]-2\arctan(x-t)\right\} \\ &\quad+[3s^2t-2s^3]_{s=0}^{s=t} \\ =&\frac{1}{2}\left\{(x+t)\log[1+(x+t)^2]+2\arctan(x+t)-\log[1+(x-t)^2]-2\arctan(x-t)\right\} \\ &\quad-2t+t^3. \end{aligned}$$

<u>Verifica</u>: $u(x,0)=0$,

$$u_t(x,0)=\log(1+x^2)+\frac{2(x-t)^2}{1+(x-t)^2}+\frac{2}{1+(x-t)^2}-2=\log(1+x^2),$$

e ponendo $u(x,t)=\varphi(x+t)-\varphi(x-t)-2t+t^3$, dove $\varphi(y)=y\log(1+y^2)+2\arctan y$, si ha

$$u_{tt}-u_{xx}=[\varphi''(x+t)-\varphi''(x-t)+6t]-[\varphi''(x+t)-\varphi''(x-t)]=6t.$$

ESERCIZIO 4
Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0 & x\in\mathbb{R}, t>0, \\ u(x,0)=e^{-x}\cos^2 x & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare che la funzione ottenuta è la soluzione del problema.

SOLUZIONE Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione del calore sulla retta.

$$
\begin{aligned}
u(x,t) =& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} e^{-x-2s\sqrt{t}} \cos^2(x+2s\sqrt{t}) ds \\
=& \frac{e^{-x+t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s+\sqrt{t})^2} \frac{1+\cos(2x+4s\sqrt{t})}{2} ds \\
=& \frac{e^{-x+t}}{2} + \frac{e^{-x+t}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s+\sqrt{t})^2} \cos[2(x-2t)+4(s+\sqrt{t})\sqrt{t}] ds \\
=& \frac{e^{-x+t}}{2} + \cos(2x-4t) \frac{e^{-x+t}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s+\sqrt{t})^2} \cos[4(s+\sqrt{t})\sqrt{t}] ds \\
(r = s+\sqrt{t}) \qquad =& e^{-x+t} + \cos(2x-4t) \frac{e^{-x+t}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} \cos(4r\sqrt{t}) dr \\
=& \frac{e^{-x+t}}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x-4t) e^{-x-3t}.
\end{aligned}
$$

<u>Verifica</u>:

$$
u(x,0) = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x = e^{-x}\cos^2 x
$$

e poi

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} = \left[\frac{e^{-x+t}}{2} + 2\sin(2x-4t)e^{-x-3t} - \frac{3}{2}\cos(2x-4t)e^{-x-3t} \right] \\
- \left[\frac{e^{-x+t}}{2} + 2\sin(2x-4t)e^{-x-3t} - \frac{3}{2}\cos(2x-4t)e^{-x-3t} \right] = 0.
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO 5
Risolvere il seguente problema:

$$
\begin{cases}
u_{xx} + u_{yy} = 0 & 1 < x^2+y^2 < 9, \\
u = 3x + 2xy & x^2+y^2 = 1, \\
u = \frac{x}{3} + 2xy & x^2+y^2 = 9.
\end{cases}
$$

Verificare che la funzione ottenuta risolve effettivamente il problema.

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in un anello. Si ha:

$$
\begin{aligned}
&[3x+2xy]_{x=\cos\theta, y=\sin\theta} = 3\cos\theta + 2\cos\theta\sin\theta = 2\cos\theta + \sin 2\theta \\
&\left[\frac{x}{3} + 2xy\right]_{x=3\cos\theta, y=3\cos\theta} = \sin\theta + 9\sin 2\theta.
\end{aligned}
$$

Quindi in coordinate polari il problema diventa:

$$
\begin{cases}
U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = 0 & 1 < r < 2, 0 \le \theta \le 2\pi, \\
U(1,\theta) = 3\cos\theta + \sin 2\theta & 0 \le \theta \le 2\pi, \\
U(3,\theta) = \cos\theta + 9\sin 2\theta & 0 \le \theta \le 2\pi.
\end{cases}
$$

Cercando la soluzione nella forma

$$U(r,\theta) = \left(C_1 r + C_2 \frac{1}{r}\right)\cos\theta + \left(C_3 r^2 + C_4 \frac{1}{r^2}\right)\sin 2\theta$$

troviamo che deve essere

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ 3C_1 + \frac{1}{3}C_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_3 + C_4 = 1 \\ 9C_3 + \frac{1}{9}C_4 = 9 \end{cases}$$

e quindi $C_1 = 0, C_2 = 3, C_3 = 1, C_4 = 0$. In conclusione,

$$U(r,\theta) = \frac{3}{r}\cos\theta + r^2 \sin 2\theta$$

e tornando in coordinate cartesiane troviamo

$$\frac{3}{r}\cos\theta + r^2\sin 2\theta = \frac{3r\cos\theta}{r^2} + 2r\sin\theta r\cos\theta = \frac{3x}{x^2+y^2} + 2xy.$$

Verifica. Si ha:

$$\left[\frac{3x}{x^2+y^2} + 2xy\right]_{x^2+y^2=1} = 3x + 2xy,$$

$$\left[\frac{3x}{x^2+y^2} + 2xy\right]_{x^2+y^2=9} = \frac{x}{3} + 2xy$$

e poi

$$u_x = \frac{3y^2 - 3x^2}{(x^2+y^2)^2} + 2y, \qquad u_{xx} = \frac{-6x(x^2+y^2) - 4x(3y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{6x^3 - 18xy^2}{(x^2+y^2)^3},$$

$$u_y = \frac{-6xy}{(x^2+y^2)^2} + 2x, \qquad u_{yy} = \frac{-6x(x^2+y^2) + 4y\cdot 6xy}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-6x^3 + 18xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$

e quindi $u_{xx} + u_{yy} = 0$.