INGEGNERIA ELTTROTECNICA - ANALISI MATEMATICA I
PROVA SCRITTA DEL 07-01-2014

COMPITO A

ESERCIZIO 1
Determinare le soluzioni z_1, z_2 dell'equazione $z^2 + iz + i\frac{\sqrt{3}}{4} = 0$.

SOLUZIONE
Il discriminante vale $\Delta = i^2 - i\sqrt{3} = -1 - i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$, e le sue radici quadrate sono: $\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{2}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = \pm(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})$. Le soluzioni dell'equazione sono date dalla formula: $z = \frac{-i\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, e sono quindi $z_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ e $z_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$.

ESERCIZIO 2
Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \frac{\cos x}{\sin x+1}y = \frac{2x}{\sin x+1} \\ y(\pi) = 2\pi^2. \end{cases}$$

SOLUZIONE
L'equazione è lineare del primo ordine. Abbiamo $a(x) = \frac{\cos x}{\sin x+1}$ e quindi, integrando,

$$A(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x + 1}dx = \int \frac{d(\sin x + 1)}{\sin x + 1} = \log(\sin x + 1) + C.$$

Ponendo $y(x) = \frac{v(x)}{\sin x+1}$, troviamo l'equazione $v' = 2x$, la cui soluzione è $v(x) = x^2 + c$. Quindi la soluzione generale è: $y(x) = \frac{x^2}{\sin x+1} + \frac{C}{\sin x+1}$. Imponendo la condizione di Cauchy, troviamo che deve essere $2\pi^2 = \pi^2 + C$, e quindi $C = \pi^2$. La soluzione dell'esercizio è

$$y(x) = \frac{x^2}{\sin x + 1} + \frac{\pi^2}{\sin x + 1}.$$

ESERCIZIO 3
Studiare la convergenza del seguente integrale generalizzato:

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x^\alpha} - 1}{\sin\frac{1}{x^{\alpha/2}}}dx$$

al variare di $\alpha > 0$.

SOLUZIONE Dalle stime asintotiche $\sin t \sim t$ e $e^t - 1 \sim t$, per $t \to 0$, otteniamo subito:

$$\frac{e^{1/x^\alpha} - 1}{\sin\frac{1}{x^{\alpha/2}}} \sim \frac{1/x^\alpha}{1/x^{\alpha/2}} = \frac{1}{x^{\alpha/2}} \qquad \text{per} \quad x \to +\infty,$$

e quindi l'integrale converge quando $\frac{\alpha}{2} > 1$, cioè per $\alpha > 2$.

ESERCIZIO 4
Determinare la formula di Taylor di ordine 7 e centro in $x_0 = \pi$ per la funzione $\cos 3x$.

SOLUZIONE
Scrivendo $x = (x - \pi) + \pi$ troviamo che $\cos 3x = \cos[3(x - \pi) + 3\pi] = -\cos[3(x - \pi)]$ e dallo sviluppo

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + o(t^7) \qquad \text{per } t \to 0,$$

ponendo $t = 3(x - \pi)$, deduciamo che

$$\cos 3x = -1 + \frac{9(x-\pi)^2}{2} - \frac{3^4(x-\pi)^4}{4!} + \frac{3^6(x-\pi)^6}{6!} + o((x-\pi)^7) \qquad \text{per } x \to \pi.$$

ESERCIZIO 5
Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e tale che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1.$$

Stabilire quali tra le seguenti funzioni hanno in 0 una discontinuità eliminabile e quali hanno una discontinuità di salto (o di prima specie).

a) $f(x) + \dfrac{f(-x)}{2}$; b) $\mathrm{sign}(x) f(x)$; c) $f(x^2)$; d) $|f(x)| + f(x)$.

SOLUZIONE
b) e c) presentano una discontinuità eliminabile, a) e d) un salto.

COMPITO B

ESERCIZIO 1
Determinare le soluzioni z_1, z_2 dell'equazione $z^2 + z + i\frac{\sqrt{3}}{4} = 0$.

SOLUZIONE
Il discriminante vale $\Delta = 1 - i\sqrt{3} = 2[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})]$, e le sue radici quadrate sono: $\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right] = \pm(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}})$. Le soluzioni dell'equazione sono date dalla formula: $z = \frac{-1\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, e sono quindi $z_1 = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} - i\frac{1}{2\sqrt{2}}$ e $z_2 = -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + i\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

ESERCIZIO 2
Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - \frac{\sin x}{\cos x+1}y = \frac{2x}{\cos x+1} \\ y(0) = \pi^2. \end{cases}$$

SOLUZIONE
L'equazione è lineare del primo ordine. Abbiamo $a(x) = -\frac{\sin x}{\cos x+1}$ e quindi, integrando,

$$A(x) = \int \frac{-\sin x}{\cos x + 1}dx = \int \frac{d(\cos x + 1)}{\cos x + 1} = \log(\cos x + 1) + C.$$

Ponendo $y(x) = \frac{v(x)}{\cos x+1}$, troviamo l'equazione $v' = 2x$, la cui soluzione è $v(x) = x^2 + c$. Quindi la soluzione generale è: $y(x) = \frac{x^2}{\cos x+1} + \frac{C}{\cos x+1}$. Imponendo la condizione di Cauchy, troviamo che deve essere $\pi^2 = \frac{C}{2}$, e quindi $C = 2\pi^2$. La soluzione dell'esercizio è

$$y(x) = \frac{x^2}{\cos x + 1} + \frac{2\pi^2}{\cos x + 1}.$$

ESERCIZIO 3
Studiare la convergenza del seguente integrale generalizzato:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x^{3\alpha}}\right)}{e^{1/x^\alpha} - 1}dx$$

al variare di $\alpha > 0$.

SOLUZIONE Dalle stime asintotiche $\log(1+t) \sim t$ e $e^t - 1 \sim t$, per $t \to 0$, otteniamo subito:

$$\frac{\log\left(1 + \frac{1}{x^{3\alpha}}\right)}{e^{1/x^\alpha} - 1} \sim \frac{1/x^{3\alpha}}{1/x^\alpha} = \frac{1}{x^{2\alpha}} \qquad \text{per} \quad x \to +\infty,$$

e quindi l'integrale converge quando $2\alpha > 1$, cioè per $\alpha > \frac{1}{2}$.

ESERCIZIO 4
Determinare la formula di Taylor di ordine 8 e centro in $x_0 = \pi$ per la funzione $\sin 3x$.

SOLUZIONE
Scrivendo $x = (x-\pi) + \pi$ troviamo che $\sin 3x = \sin[3(x-\pi) + 3\pi] = -\sin[3(x-\pi)]$ e dallo sviluppo

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + o(t^8) \qquad \text{per } t \to 0,$$

ponendo $t = 3(x-\pi)$, deduciamo che

$$\sin 3x = -3(x-\pi) + \frac{3^3(x-\pi)^3}{3} - \frac{3^5(x-\pi)^5}{5!} + \frac{3^7(x-\pi)^7}{7!} + o((x-\pi)^8) \qquad \text{per } x \to \pi.$$

ESERCIZIO 5
Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e tale che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.$$

Stabilire quali tra le seguenti funzioni hanno in 0 una discontinuità eliminabile e quali hanno una discontinuità di salto (o di prima specie).

a) $2f(x) + f(-x)$; b) $\dfrac{\mathrm{sign}(x)}{f(x)}$; c) $f(x^4)$; d) $|f(x)| - f(x)$.

SOLUZIONE
b) e c) presentano una discontinuità eliminabile, a) e d) un salto.