

Soluzione numerica di problemi alle derivate parziali

Metodi alle differenze finite

Prof. LAURA GORI
Anno Accademico 1998-99

1. Generalità sulle equazioni alle derivate parziali

Un'equazione differenziale alle derivate parziali ha come incognita una funzione $u(x_1, x_2, \dots, x_r)$ di r variabili indipendenti e stabilisce un legame tra le variabili indipendenti, la funzione u e le sue derivate parziali fino ad un certo ordine n , detto *ordine* dell'equazione.

Le equazioni alle derivate parziali forniscono modelli matematici di numerosi problemi fisici, che si presentano in varie aree della matematica applicata e dell'ingegneria, come avviene ad esempio nella trattazione di problemi di idrodinamica, di propagazione del calore, di diffusione di flussi di elettricità, di elasticità.

Per il loro particolare interesse nel campo dei problemi di ingegneria, prenderemo in considerazione equazioni del primo ordine e del secondo ordine, che, nella forma generale hanno espressioni del tipo

$$(1.1) \quad F(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

$$(1.2) \quad F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0,$$

ma la nostra attenzione sarà rivolta essenzialmente alle equazioni *quasi lineari*, di forma normale; ciò significa che la (1.1) si particolarizza nella forma

$$(1.3) \quad au_x + bu_y = f,$$

dove a, b, f sono funzioni di x, y ed u ; la (1.2) si particolarizza nella forma

$$(1.4) \quad au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = f,$$

dove a, b, c, f sono funzioni di x, y, u, u_x, u_y .

In entrambi i casi, l'equazione viene detta *lineare* se i coefficienti a e b (rispettivamente a, b, c) dipendono solo da x e y , ed f è lineare in u (rispettivamente in u, u_x, u_y).

Nei problemi specifici che saranno trattati in questo capitolo, di frequente una variabile, sia x , è una variabile spaziale, l'altra è una variabile temporale e, quando ciò si verifica, verrà indicata con t anziché con y .

Integrale o soluzione, in senso classico, di una equazione alle derivate parziali di ordine n è una funzione u che soddisfa l'equazione in un dato aperto connesso Ω , dove u risulta continua con le derivate fino alle n -esime; se sono assegnate delle condizioni al limite o al contorno su Γ , frontiera di Ω (o parte di essa) allora u deve essere derivabile con continuità su $\Omega \cup \Gamma$ fino all'ordine richiesto dalle condizioni. *Integrale generale* è la totalità delle soluzioni.

Tra le equazioni (1.3) e (1.4) ne segnaliamo in particolare alcune, notevoli per l'elevato interesse che hanno nelle applicazioni; infatti modellizzano vari e diversi fenomeni fisici. Si tratta delle seguenti

equazioni, nelle quali c denota una costante positiva

$$(1.5) \quad u_t + cu_x = 0, \quad \text{equazione del trasporto,}$$

$$(1.6) \quad u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad \text{equazione delle onde,}$$

$$(1.7) \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \text{equazione di Laplace,}$$

$$(1.8) \quad u_t - cu_{xx} = 0, \quad \text{equazione del calore.}$$

Riferendoci ad alcune di queste equazioni mostriamo una proprietà di carattere generale delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali, ovvero che l'integrale generale dipende da *funzioni arbitrarie*, anziché da costanti arbitrarie, come nel caso delle equazioni differenziali ordinarie.

III Esempio 1.1

L'equazione del trasporto

$$(1.9) \quad u_t + cu_x = 0$$

può essere utilizzata per descrivere il puro trasporto di una grandezza u effettuato da un campo di velocità c .

È evidente che la (1.9) è soddisfatta quando si ponga

$$(1.10) \quad u(x, t) = f(x - ct)$$

dove f è un'arbitraria funzione drivabile, in quanto si ha

$$(1.11) \quad u_t = -cf'(x - ct), \quad u_x = f'(x - ct).$$

La funzione $f(x - ct)$ (indipendentemente dalla sua espressione) viene anche detta *onda*; graficamente, l'andamento di $f(x - ct)$ si ottiene da quello di $f(x)$, che rappresenta la configurazione al tempo $t = 0$, mediante una traslazione di ampiezza ct , nel verso positivo dell'asse x .

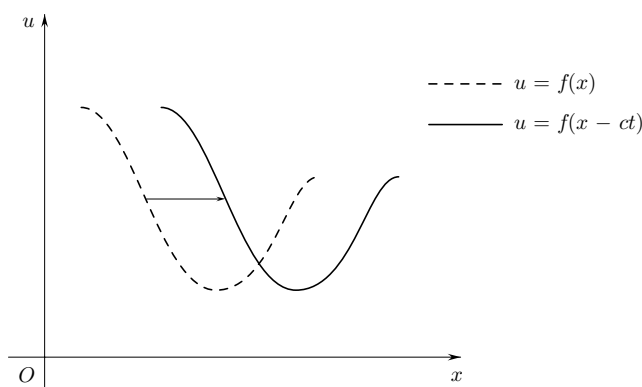


Fig. 1.

Le onde che si prendono in esame sono di varia natura: onde elettromagnetiche, onde sonore, onde alla superficie di un fluido.

III Esempio 1.2

L'equazione delle onde, o della corda vibrante

$$(1.12) \quad u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

ha la seguente interpretazione fisica: è data una corda elastica, disposta, in condizioni di riposo, lungo l'asse x ; la configurazione viene perturbata e la corda lasciata vibrare; allora si può dimostrare

che lo spostamento normale $u(x, t)$ che all'istante t viene ad avere il punto di ascissa x , è un integrale della (1.12). L'integrale generale della (1.12) si individua facilmente eseguendo un cambio di variabili

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct,$$

mediante il quale l'equazione (1.12) assume la forma

$$(1.13) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

(basta osservare che $x = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$, $t = \frac{1}{2c}(\xi - \eta)$ e applicare la derivazione delle funzioni composte). Integrando (1.13) rispetto ad η si ottiene

$$(1.14) \quad u_\xi = F(\xi)$$

con F funzione arbitraria; integrando la (1.14) rispetto a ξ , e indicando con f la primitiva di F , si ottiene l'integrale generale della (1.13):

$$(1.15) \quad u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

con g funzione arbitraria. Quindi l'integrale generale della (1.12) è della forma

$$(1.16) \quad u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

con f e g funzioni arbitrarie (ma aventi derivate seconde!). La (1.16) esprime il fatto che il moto della corda risulta dalla sovrapposizione di due onde che viaggiano in direzioni opposte.

III Esempio 1.3

Consideriamo l'equazione di Laplace

$$(1.17) \quad u_{xx} + u_{yy} = 0;$$

ricordiamo che l'operatore

$$(1.18) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

viene detto Laplaciano e indicato talora con ∇^2 o con Δ .

Ricordiamo anche che per una funzione olomorfa $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ sussiste la condizione di Cauchy-Riemann $f_x = \frac{1}{i}f_y$, che ha come conseguenza

$$(1.19) \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0;$$

dunque la parte reale e il coefficiente dell'immaginario di una qualsiasi *funzione olomorfa* sono soluzioni reali dell'equazione di Laplace.

Le soluzioni dell'equazione di Laplace sono anche dette *funzioni armoniche*; ad esempio sono armoniche le funzioni $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$ in quanto $e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$, e^z olomorfa.

In molti casi, il problema di determinare l'integrale generale di un'equazione alle derivate parziali può presentare difficoltà notevoli; nella pratica può, non è tanto importante individuare tutte le soluzioni di un'equazione, quanto piuttosto trovarne una particolare, soddisfacente assegnate condizioni iniziali o ai limiti. Purtroppo, a differenza di quanto avviene per le equazioni ordinarie, per quelle alle derivate parziali non vi è una teoria completa per quanto riguarda esistenza ed unicità delle soluzioni.

Inoltre, eccetto per alcuni problemi che sono risolti con formule esplicite, i metodi analitici non sono adatti a dare luogo ad una efficiente valutazione numerica delle soluzioni, che sono espresse, in molti casi, mediante serie o integrali. Tutto ciò richiede quindi tecniche di approssimazione numerica.

In quanto segue esamineremo *problemi ai valori iniziali o/e ai limiti* (o al contorno) e sottolineiamo che tutti i problemi che affronteremo sono *ben posti* (nel senso di Hadamard), con ciò intendendo significare che

- 1 – la soluzione esiste ed è unica
- 2 – la soluzione dipende con continuità dai dati (ossia piccole variazioni nei dati producono piccole variazioni nella soluzione).

III Esempio 1.4

Si consideri un filo metallico termicamente isolato, di lunghezza L , omogeneo con densità R , avente calore specifico C , conduttività termica k ; supponiamo che il filo si trovi inizialmente alla temperatura T_0 e gli estremi siano mantenuti alla temperatura T_1 .

Si può dimostrare che la temperatura $u(x, t)$ assunta dal generico punto x del filo, all'istante t , risolve il problema

$$(1.20) \quad u_{xx} = \frac{RC}{k} u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$(1.21) \quad u(x, 0) = T_0, \quad 0 \leq x \leq L$$

$$(1.22) \quad u(0, t) = u(L, t) = T_1, \quad t > 0.$$

La (1.21) è una *condizione iniziale*, le (1.22) sono *condizioni ai limiti* (o *al contorno*).

III Esempio 1.5

$$(1.23) \quad u_{xx} + u_{yy} = -a^2 F \quad (x, y) \in A$$

$$(1.24) \quad u(x, y) = 0 \quad (x, y) \in \Gamma$$

è un problema con *condizione al contorno*; si tratta del modello matematico del seguente problema: una membrana perfettamente elastica, omogenea, disposta sul piano xy , e fissata con tensione uniforme lungo il contorno $\Gamma = \partial A$ dell'aperto limitato A , viene sottoposta a carichi trasversali di densità F . Assume allora una configurazione $u(x, y)$ soddisfacente (1.23) e (1.24); dove a^2 è una costante dipendente dalle caratteristiche fisiche della membrana.

In seguito faremo uso dei seguenti simboli

$$(1.25) \quad Lu(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (\text{o anche } L(u) = f)$$

denota sinteticamente l'equazione alle derivate parziali generica, L essendo un operatore differenziale; Ω è l'insieme in cui l'equazione deve essere soddisfatta. Del tipo (1.25) sono ad esempio (1.20), (1.23) ecc.

Le condizioni ai valori iniziali, come la (1.21) o al contorno come la (1.22) e la (1.24) saranno indicate con

$$(1.26) \quad Bu(Q) = g(Q) \quad Q \in \Gamma$$

dove Γ è l'insieme dei punti in cui le condizioni sono imposte.

2. Linee caratteristiche. Classificazione delle equazioni quasi lineari

Per le equazioni alle derivate parziali è di interesse fondamentale la *classificazione* basata sul concetto di *linee caratteristiche*. Queste sono curve che vengono definite in relazione al *problema di Cauchy*, il quale è posto nella forma seguente: per un'equazione del 1° ordine (cfr. (1.1)), il problema di Cauchy consiste nella ricerca di una soluzione $u(x, y)$ che assuma valori assegnati lungo una data curva Γ , ovvero che verifichi la *condizione iniziale*

$$(2.1) \quad u[\alpha(\tau), \beta(\tau)] = \varphi(\tau), \quad t_0 \leq \tau \leq t_1,$$

dove

$$(2.2) \quad x = \alpha(\tau), \quad y = \beta(\tau)$$

sono le equazioni parametriche, note, di Γ e φ è una funzione assegnata.

Geometricamente, il problema di Cauchy richiede di individuare una *superficie integrale*, che passi per la curva \mathcal{C} dello spazio (x, y, u) , di equazione $x = \alpha(\tau)$, $y = \beta(\tau)$, $u = \varphi(\tau)$.

Per un'equazione del 2° ordine, (cfr. (1.2)), il problema di Cauchy consiste nell'individuazione di una soluzione che lungo una curva Γ , ancora di equazioni (2.2), assuma, insieme alle sue derivate parziali, valori assegnati, ossia verifichi le condizioni

$$(2.3) \quad u[\alpha(\tau), \beta(\tau)] = \varphi(\tau), \quad u_x[\alpha(\tau), \beta(\tau)] = g(\tau), \quad u_y[\alpha(\tau), \beta(\tau)] = h(\tau)$$

dove φ , g , h sono funzioni assegnate, verificanti la condizione

$$(2.4) \quad \varphi'(\tau) = g(\tau) \cdot \alpha'(\tau) + h(\tau) \cdot \beta'(\tau)$$

dedotta dalle (2.3) derivando la prima di esse rispetto a τ .

Spesso il problema di Cauchy è posto con le condizioni (2.4)

$$(2.4) \quad u[\alpha(\tau), \beta(\tau)] = \varphi(\tau), \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \psi(\tau)$$

φ e ψ funzioni date, $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ derivata secondo la normale a Γ .

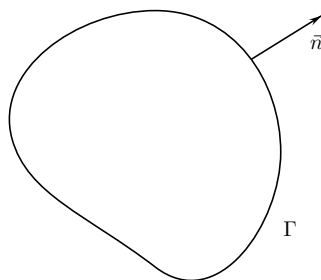


Fig. 2.

Le (2.4) consentono di calcolare le funzioni g e h e quindi assegnare u_x e u_y su Γ , in quanto, come è noto, si ha, indicando con $c_1 = \beta' / \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}$ e $c_2 = -\alpha' / \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}$ i coseni direttori di \vec{n} ,

$$(2.5) \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = u_x c_1 + u_y c_2$$

e quindi deve essere

$$(2.6) \quad \psi(\tau) = g(\tau) c_1 + h(\tau) c_2$$

relazione che insieme alla (2.4) permette di calcolare appunto g e h .

Geometricamente, si vuole trovare una superficie che passi per la curva \mathcal{C} sopra definita e abbia in ogni punto di questa un assegnato piano tangente: il piano di equazione $u - \varphi(\tau) = [x - \alpha(\tau)] \cdot g(\tau) + [y - \beta(\tau)]h(\tau)$. Si può dimostrare, e lo faremo in dettaglio per le equazioni quasi lineari, che esistono delle particolari linee Γ , per le quali il *problema di Cauchy è impossibile o indeterminato*, tali curve vengono definite come *linee caratteristiche*; specifichiamo che per le equazioni del 2° ordine tali linee possono *non* essere reali.

Studiamo ora i casi cui siamo interessati, cioè quelli delle equazioni quasi-lineari del 1° ordine e del 2° ordine.

III 2.1. Linee caratteristiche per l'equazione (1.3)

Prendiamo in esame l'equazione quasilineare del 1° ordine, con $a \neq 0$,

$$(2.7) \quad a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = f(x, y, u)$$

con la condizione di Cauchy (2.1); supponendo che $\varphi(\tau)$ sia derivabile, risulta noto il valore

$$(2.8) \quad \frac{d}{dt}u[\alpha(\tau), \beta(\tau)] = \varphi'(\tau).$$

Se il problema di Cauchy ammette soluzione, i dati (2.1) e (2.8) devono consentire di calcolare u_x e u_y lungo Γ ; osserviamo che, lungo Γ , ossia per $x = \alpha(\tau)$, $y = \beta(\tau)$ devono valere simultaneamente le equazioni (2.7) e (2.8) ossia

$$(2.9) \quad \begin{cases} au_x + bu_y = f \\ \alpha'u_x + \beta'u_y = \varphi' \end{cases}$$

ma queste sono univocamente risolubili in u_x , u_y se e solo se il determinante

$$(2.10) \quad D = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$$

è non nullo. Se invece α' e β' (e quindi la curva Γ) sono tali da rendere

$$(2.11) \quad D = a\beta' - b\alpha' = 0$$

il sistema (2.9) è impossibile o indeterminato, ovvero se si assegnano i dati lungo una curva definita da (2.2), con α e β verificanti (2.11) il problema di Cauchy o non ha soluzione o ne ha infinite.

Da (2.2) segue

$$(2.12) \quad \alpha'(\tau) = \frac{dx}{d\tau}, \quad \beta'(\tau) = \frac{dy}{d\tau}$$

e quindi la (2.11) diventa

$$(2.13) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a},$$

che dimostra che per l'equazione (2.7) le linee caratteristiche esistono sempre, sono reali e hanno in ogni punto come coefficiente angolare della tangente il valore $\frac{b}{a}$ che (cfr. (2.7)) dipende da x , y e u .

Per le equazioni a coefficienti costanti le *linee caratteristiche* sono facilmente calcolabili: esse si riducono a rette di equazione

$$(2.14) \quad y - \frac{b}{a}x = \text{cost}.$$

III Esempio 2.1

Per l'equazione del trasporto (1.9), assegnando i dati del problema di Cauchy lungo l'asse delle ascisse, si ha il problema

$$(2.15) \quad \begin{cases} u_t + cu_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

la cui soluzione, ricordando la (1.10), è data evidentemente da

$$(2.16) \quad u(x, t) = \varphi(x - ct)$$

e le linee caratteristiche (2.14) assumono la forma

$$(2.17) \quad x - ct = \text{cost}$$

dove cost indica una generica costante.

Le (2.17) formano una famiglia di semirette parallele

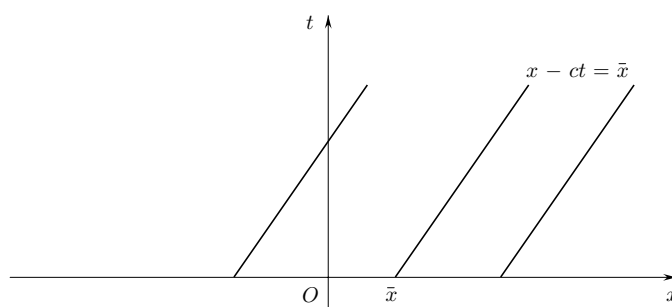


Fig. 3. Linee caratteristiche dell'equazione del trasporto.

Da (2.16) e (2.17) segue che sulle *caratteristiche* la soluzione u ha valore costante, ad esempio sulla caratteristica passante per $(\bar{x}, 0)$, risulta

$$(2.18) \quad u(x, t) = \varphi(\bar{x}),$$

ciò è come dire che le *linee caratteristiche* sono linee lungo le quali si *propaga il segnale*, ossia il valore del dato al tempo $t = 0$. Si noti anche che, se il dato φ ha una singolarità in x_0 , questa si ripresenta nella soluzione al tempo t e nel punto di ascissa x , situato sulla caratteristica $x - ct = x_0$, in quanto $u(x, t) = \varphi(x - ct) = \varphi(x_0)$; quindi le caratteristiche sono anche linee lungo le quali si propagano le discontinuità e pertanto linee che separano “lambi di soluzione” regolari.

III Esempio 2.2

Per l'equazione a coefficienti *non* costanti

$$(2.19) \quad u_t + 2tu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

con la condizione di Cauchy

$$(2.20) \quad u(x, 0) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad t > 0$$

le linee caratteristiche, in base alla (2.13) sono date da

$$(2.21) \quad x = t^2 + \text{cost} .$$

La soluzione è data da

$$(2.22) \quad u(x, t) = \frac{1}{1 + (x - t^2)^2}$$

e può essere rappresentata nella forma

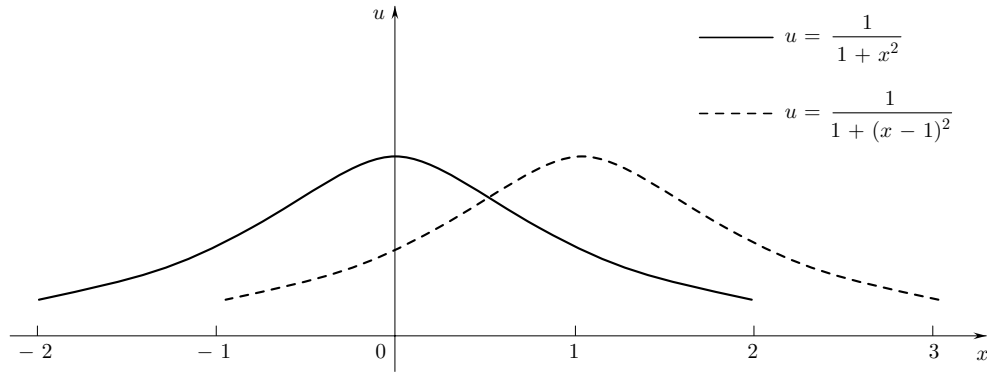


Fig. 4. Soluzioni corrispondenti agli istanti $t = 0$, $t = 1$.

L'onda in questo caso si propaga con velocità $2t$, mantenendo però la stessa forma; la soluzione si mantiene poi costante sulle parabole di equazione (2.21).

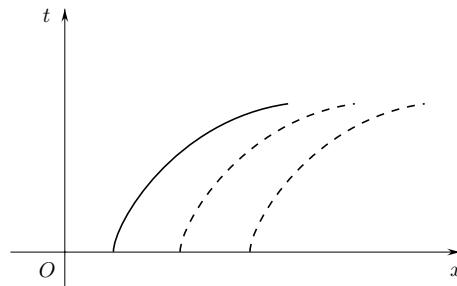


Fig. 5. Linee caratteristiche dell'equazione (2.19).

III 2.2. Linee caratteristiche per l'equazione (1.4)

Consideriamo ora il problema di Cauchy per le equazioni quasi-lineari del 2° ordine nella forma già vista

$$(2.23) \quad a(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx} + b(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy} + c(x, y, u, u_x, u_y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

$$(2.24) \quad u[\alpha(\tau), \beta(\tau)] = \varphi(\tau), \quad u_x[\alpha(\tau), \beta(\tau)] = g(\tau), \quad u_y[\alpha(\tau), \beta(\tau)] = h(\tau)$$

assumendo $\varphi, g, h \in C^1[t_0, t_1]$. Le derivate seconde di u assumono allora su Γ dei valori che devono soddisfare le tre seguenti equazioni lineari, in cui, a, b, c, u e le sue derivate sono calcolate per $x = \alpha(\tau)$, $y = \beta(\tau)$:

$$(2.25) \quad \begin{cases} au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = f \\ \alpha'(\tau)u_{xx} + \beta'(\tau)u_{xy} = g' \\ \alpha'(\tau)u_{xy} + \beta'(\tau)u_{yy} = h' \end{cases}$$

le due ultime equazioni sono evidentemente dedotte dalla (2.24) per derivazione. Introdotto il determinante

$$(2.26) \quad D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha'(\tau) & \beta'(\tau) & 0 \\ 0 & \alpha'(\tau) & \beta'(\tau) \end{vmatrix}$$

il problema di calcolare le derivate seconde di u lungo Γ ha soluzione unica se e solo se $D \neq 0$. Se invece α e β sono tali da annullare D , ossia da rendere

$$(2.27) \quad D = a\beta'^2 - b\alpha'\beta' + c\alpha'^2 = 0$$

il problema posto è impossibile o indeterminato, in quanto i dati (2.24) non sono sufficienti ad individuare univocamente le derivate seconde di u su Γ . Tenendo conto di (2.12), la (2.27) si traduce nella

$$(2.28) \quad a \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 - b \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{dx}{d\tau} + c \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 = 0$$

e quindi nella

$$(2.29) \quad a \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - b \frac{dy}{dx} + c = 0.$$

Pertanto le curve, assegnando i dati lungo le quali, il problema di Cauchy è impossibile o indeterminato, ossia le *linee caratteristiche*, hanno in ogni punto coefficiente angolare della tangente espresso da

$$(2.30) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Le direzioni individuate dalla (2.30) sono dette *direzioni caratteristiche*; esse variano con x , y ed u . Posto

$$(2.31) \quad \mathcal{D} = b^2 - 4ac$$

per ogni punto della regione del piano (x, y) in cui $\mathcal{D} > 0$, si hanno due direzioni caratteristiche reali e distinte e l'equazione (2.23) viene detta *iperbolica*; se $\mathcal{D} = 0$ le direzioni caratteristiche sono reali e coincidenti e l'equazione è detta *parabolica*; se $\mathcal{D} < 0$, le direzioni caratteristiche sono complesse coniugate e l'equazione è detta *ellittica*. Nei tre casi si hanno rispettivamente due famiglie di curve caratteristiche reali, una sola famiglia di curve caratteristiche reali, e solo caratteristiche complesse.

È evidente che una stessa equazione può risultare di diverso tipo in diverse regioni del piano, a meno che i coefficienti non siano costanti.

È facile vedere che l'equazione delle onde (1.6) è iperbolica, l'equazione del calore (1.7) è parabolica, e quella di Laplace (1.8) è ellittica.

La classificazione ora presentata è di notevole importanza; esistono infatti metodi di soluzione numerica quale il *metodo delle caratteristiche* che si basano su un uso appropriato di tali linee per determinare la soluzione. Inoltre la distinzione tra i diversi tipi si rispecchia nel fatto che sono di natura differente i problemi che si studiano nei tre casi.

Per le equazioni *iperboliche* sono di interesse i problemi ai valori iniziali e al contorno; se su una certa curva Γ si assegnano i valori della soluzione le condizioni sono dette di *Dirichlet*, se si assegnano i valori della derivata normale, le condizioni sono dette di tipo *Neumann*.

Per le equazioni paraboliche si assegnano in generale condizioni di tipo Dirichlet.

Alle equazioni ellittiche si associano all'equazione, che generalmente è studiata in un insieme limitato Ω , condizioni di tipo Dirichlet su parte della frontiera di Ω (o anche su tutta $\partial\Omega$), e condizioni di tipo Neumann sulla parte restante (o su tutta $\partial\Omega$).

III.3. Metodi numerici alle differenze finite. Consistenza, stabilità, convergenza

I metodi numerici che si possono applicare per approssimare i problemi alle derivate parziali, vista la grande importanza che tali equazioni hanno nelle applicazioni, sono numerosi; tra essi: *metodi variazionali*, *metodi agli elementi finiti*, *metodi alle differenze finite*. Data la specificità del Corso, ci limiteremo a prendere in esame i metodi alle differenze finite, che sono basati sulle seguenti idee di base. Detto D il dominio nel quale il problema è da risolvere, si sovrappone a D un *reticolo* costituito dai punti $P_{ij} = (x_i, y_j)$, si considera l'equazione scritta sui nodi del reticolo; ad esempio, riferendosi alla (1.7), si considera

$$(3.1) \quad u_{xx}(x_i, y_j) + u_{yy}(x_i, y_j) = 0,$$

e si approssimano le derivate parziali con formule di derivazione numerica; in parte, queste formule sono state presentate in [L. G., § 6.15]⁽¹⁾ per le derivate ordinarie e sono comunque deducibili da sviluppi di Taylor. Per comodità, riportiamo quelle di cui faremo uso in seguito, associandole alla reticolazione rettangolare riportata in figura. Questa reticolazione è tra le più usate, perché rende semplice la programmazione del metodo risolutivo, ed è ottenuta con nodi equispaziati con

$$(3.2) \quad x_{i+1} - x_i = h, \quad y_{j+1} - y_j = k, \quad \forall i, j.$$

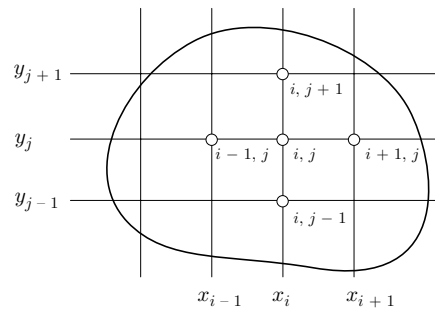


Fig. 6. Reticolazione rettangolare.

Le formule di derivazione numerica sono le seguenti:

alle differenze in avanti:

$$(3.3) \quad u_x(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)}{h} + O(h), \quad \bullet \text{---} \circ$$

$i, j \quad i+1, j$

ottenuta dallo sviluppo di Taylor

$$(3.4) \quad u(x+h, y) = u(x, y) + hu_x(x, y) + O(h^2);$$

alle differenze all'indietro:

$$(3.5) \quad u_x(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{h} + O(h), \quad \circ \text{---} \bullet$$

$i-1, j \quad i, j$

ottenuta dallo sviluppo (3.4) con $-h$ al posto di h ;

⁽¹⁾Qui e altrove con [L.G.] ci si riferisce al testo Laura Gori, *Calcolo Numerico*, IV Edizione, Ediz. Kappa, 1999.

alle differenze centrali, ottenuta dalla (6.15.4) [L. G.]

$$(3.6) \quad u_x(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{2h} + O(h^2), \quad \begin{array}{c} \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \\ i-1,j \quad i,j \quad i+1,j \end{array}$$

Analogamente si approssimano le derivate rispetto ad y con le seguenti formule:

$$(3.7) \quad u_y(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_j)}{k} + O(k); \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \\ | \\ \circ \\ i,j \end{array}; \quad \begin{array}{c} i,j+1 \\ | \\ i,j \end{array};$$

$$(3.8) \quad u_y(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j-1})}{k} + O(k); \quad \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \circ \\ i,j \end{array}; \quad \begin{array}{c} i,j \\ | \\ i,j-1 \end{array};$$

$$(3.9) \quad u_{yy}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{2k^2} + O(k^2); \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \\ | \\ \circ \\ i,j+1 \\ i,j \\ i,j-1 \end{array};$$

osserviamo esplicitamente che la (3.6) e la (3.9) hanno termini d'errore del 2° ordine rispetto al passo, a differenza delle rimanenti che hanno errore di 1° ordine.

Per le derivate seconde useremo le formule seguenti alle *differenze centrali*, dedotte dalla seconda delle (6.15.5) [L. G.]

$$(3.10) \quad u_{xx}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} + O(h^2); \quad \begin{array}{c} \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \\ i-1,j \quad i,j \quad i+1,j \end{array};$$

$$(3.11) \quad u_{yy}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2} + O(k^2); \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \\ | \\ \circ \\ i,j+1 \\ i,j \\ i,j-1 \end{array}.$$

Notiamo esplicitamente che, nei casi che tratteremo in seguito, la geometria del dominio in cui i problemi saranno risolti consentirà il calcolo delle formule appena date, in quanto i punti coinvolti nei calcoli saranno o interni o sulla frontiera del dominio.

Una funzione definita solo sui nodi del reticolo \mathcal{R} si chiama *funzione di reticolo* o *funzione discreta*. Quando nelle formule (3.3), ..., (3.11) si trascura il termine d'errore, si ottengono valori approssimati; e quando si usano valori approssimati in seguito si adotterà la simbologia già utilizzata per le equazioni differenziali ordinarie; quindi, per esempio,

$$(3.12) \quad u(x_i, y_j), \quad u_{ij}$$

indicano rispettivamente valore esatto e valore approssimato della stessa grandezza. I valori $\{u_{ij}\}$ costituiscono una funzione di reticolo.

Illustriamo ora i concetti di *consistenza*, *stabilità* e *convergenza* di un metodo numerico, ottenuto mediante discretizzazione di un problema

$$(3.13) \quad Lu(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$(3.14) \quad Bu(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Introdotta una reticolazione, l'uso delle formule di approssimazione delle derivate parziali trasforma le due formule precedenti nella

$$(3.15) \quad L_R u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{R},$$

$$(3.16) \quad B_R u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma \cap \mathcal{R},$$

dove L_R e B_R sono gli operatori relativi alla reticolazione e alle discretizzazioni scelte. Ad esempio se L è l'operatore di Laplace e si usano le (3.10), (3.11) si ha

$$(3.17) \quad Lu(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y)$$

$$(3.18) \quad L_R u(x, y) = \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2} + \frac{u(x, y+k) - 2u(x, y) + u(x, y-k)}{k^2}.$$

Si definiscono gli *errori locali di troncamento* come segue

$$(3.19) \quad \tau(x, y) = L_R u(x, y) - Lu(x, y)$$

$$(3.20) \quad \sigma(x, y) = B_R u(x, y) - Bu(x, y)$$

dove u è una qualsiasi funzione che abbia tante derivate quante necessarie per calcolare gli operatori in questione.

Il metodo alle differenze descritto da (3.15) e (3.16) si dice *consistente* con il problema (3.13), (3.14) se

$$(3.21) \quad \|\tau(x, y)\| \rightarrow 0, \quad \|\sigma(x, y)\| \rightarrow 0$$

quando tendono a zero i passi della discretizzazione h e k , in modo arbitrario. Se la (3.21) sussiste purché h e k siano legati da una condizione, il metodo si dice *condizionatamente consistente*.

Se $u(P)$ è la soluzione del problema (3.13), (3.14) e $v(P)$ la soluzione discreta del corrispondente schema discretizzato (3.15), (3.16), si dice che tale *schema è convergente* se in tutti i punti P del reticolo sussiste la relazione

$$(3.22) \quad \|u(P) - v(P)\| \rightarrow 0$$

quando h e $k \rightarrow 0$.

Anche la convergenza può essere incondizionata o condizionata.

Il legame tra consistenza e convergenza per problemi alle derivate parziali è dello stesso tipo di quello che sussiste per le equazioni differenziali ordinarie. Vale infatti il seguente *teorema di equivalenza di Lax*, di cui non diamo la dimostrazione.

TEOREMA 3.1. *Dato un problema lineare con condizioni iniziali/ai limiti, ben posto; condizione necessaria e sufficiente affinché uno schema alle differenze, consistente, sia convergente è che sia stabile.*

Per quel che riguarda il concetto di stabilità, diremo che uno schema è stabile se l'errore propagato durante i calcoli dagli operatori L_R , B_R , si mantiene limitato.

Questo concetto, che sarà illustrato in dettaglio per problemi specifici, può essere meglio specificato su questo caso particolare; siano x, t le variabili indipendenti, si consideri una reticolazione di passi h e k ; si fissi un tempo T , risulterà $T = Jk$, per vari J e k ; il metodo numerico generato da L_R e B_R è *stabile* se, per T fissato, quando $J \rightarrow \infty$ e quindi $k \rightarrow 0$, assumendo che anche $h \rightarrow 0$, l'errore propagato si mantiene limitato. Questa è la *stabilità* secondo la definizione di *Lax-Richtmyer* ed è

strettamente analoga alla zero-stabilità definita per i metodi multistep per le equazioni differenziali ordinarie.

Si può dare anche una definizione di stabilità, richiedendo che si mantenga limitato l'errore per k e h fissati e per $J \rightarrow \infty$, ma è la stabilità secondo Lax-Richtmyer quella che viene posta in relazione con convergenza e consistenza dal Teorema 3.1, e pertanto è quella che verrà presa in considerazione in seguito.

Concludiamo queste premesse con la seguente osservazione circa gli autovalori di matrici aventi una forma che interviene nei problemi discreti che tratteremo.

Ricordiamo che date due matrici A e B , aventi dimensione n , e autovalori $\{\lambda_i\}$ e $\{\mu_i\}$ rispettivamente, gli autovalori $\{\nu_i\}$ della matrice

$$(3.23) \quad C = A + \gamma B$$

dove γ è un parametro reale, sono dati da

$$(3.24) \quad \nu_i = \lambda_i + \gamma\mu_i.$$

Segnaliamo inoltre, senza dimostrarlo, ma consigliandone la verifica su qualche caso particolare, che gli autovalori della matrice tridiagonale, di ordine n ,

$$(3.25) \quad T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ 0 & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

sono reali, distinti e valgono

$$(3.26) \quad \lambda_i = 4 \sin^2 \frac{i\pi}{2(n+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

4. Schemi numerici per equazioni alle derivate parziali di primo ordine

Gli schemi numerici che verranno presentati in questo paragrafo saranno riferiti all'equazione del trasporto, per semplicità di esposizione, ma sono applicabili ad equazioni di tipo più generale, anche non lineari, iperboliche, ovvero dotate di una famiglia completa di linee caratteristiche reali.

Consideriamo dunque l'equazione del trasporto

$$(4.1) \quad u_t + cu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

con c costante positiva; nell'Esempio 2.1 si è mostrato che le linee caratteristiche di (4.1) sono le rette di equazione

$$(4.2) \quad x - ct = \text{cost}$$

aventi coefficiente angolare $\frac{1}{c}$.

Se si assegna la condizione iniziale, sulla retta $t = 0$, che non è una caratteristica:

$$(4.3) \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

come si è visto ancora nell'Esempio 2.1, la soluzione è data da

$$(4.4) \quad u(x, t) = \varphi(x - ct);$$

ne segue che in ogni punto $P^* = (x^*, y^*)$ la soluzione è determinata dal valore assunto dal dato φ nell'ascissa $\xi = x^* - ct^*$, intersezione dell'asse x con la linea caratteristica per P^*

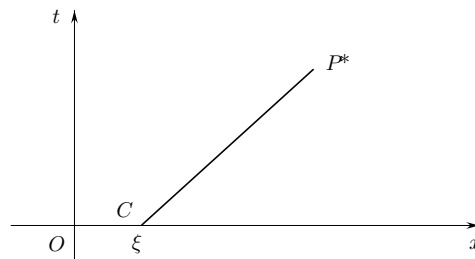


Fig. 7. Dominio di dipendenza continuo di P^* .

Il segmento P^*C è detto *dominio di dipendenza continuo* di P^* .

Consideriamo ora il seguente problema ai valori iniziali e al contorno

$$(4.5) \quad \begin{cases} u_t + cu_x = 0, & x > 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0, \\ u(0, t) = \psi(t), & t \geq 0, \end{cases}$$

dove, per la continuità, si assuma $\varphi(0) = \psi(0)$; posto $D = \{(x, y) | x \geq 0, t \geq 0\}$, costruiamo il reticolo di passi h e k , e nodi $P_{ij} = (x_i, t_j)$:

$$x_i = ih, \quad t_j = jk, \quad i, j \geq 0,$$

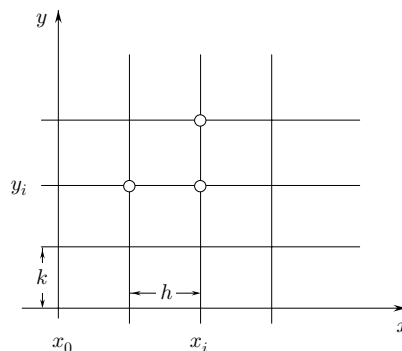


Fig. 8. Reticolo di discretizzazione per il problema (4.5).

Approssimando le derivate parziali mediante le differenze in avanti (3.7) per u_t e le differenze all'indietro (3.5) per u_x , e trascurando i termini di errore, l'equazione (4.1) viene sostituita con la seguente relazione discreta

$$(4.6) \quad \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} + c \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{h} = 0;$$

aggiungendo le condizioni assegnate e ponendo

$$(4.7) \quad \alpha = c \frac{k}{h}$$

si ottiene in definitiva il seguente schema numerico

$$(4.8) \quad \begin{cases} u_{i,j+1} = (1 - \alpha)u_{ij} + \alpha u_{i-1,j}, & i = 1, 2, \dots; j = 0, 1, \dots, \\ u_{i0} = \varphi(x_i), & i = 0, 1, \dots, \\ u_{0j} = \psi(t_j), & j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Si tratta di uno schema esplicito, a due livelli temporali, che consente il calcolo dei valori al livello $j + 1$ a partire dalla conoscenza dei valori al livello j ; si noti che i valori al livello 0 sono dati dalla condizione iniziale; e i valori per $i = 0$ dalla condizione al contorno.

Lo schema (4.8) è detto *upwind*, e fornisce una funzione discreta $\{u_{ij}\}$ di approssimazioni dei valori della soluzione nei nodi: $u(x_i, t_j)$.

Dalla prima delle (4.8) segue che il valore u_{ij} dipende dai valori della funzione discreta nei punti del reticolo situati nel triangolo formato dall'asse x e dalla retta di coefficiente angolare $\frac{k}{h}$ passante per P_{ij} , evidenziati in figura

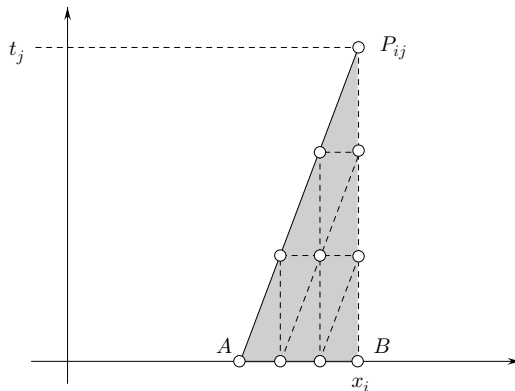


Fig. 9. Dominio di dipendenza discreto.

La regione in grigio in figura è detta *dominio di dipendenza discreto* dello schema considerato.

Osserviamo ora che, se i valori iniziali lungo AB vengono alterati, anche la soluzione numerica in P_{ij} risulta alterata, mentre il valore della soluzione esatta $u(P_{ij})$, che dipende dal valore del dato iniziale in C , punto di intersezione dell'asse x con la caratteristica per P_{ij} , non viene modificato nel caso che il punto C risulti *esterno* ad AB . Pertanto, in tal caso, la soluzione numerica *non può convergere*, per $h, k \rightarrow 0$, alla soluzione continua.

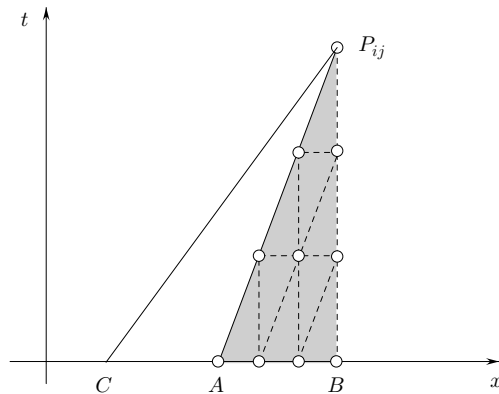


Fig. 10. Dominio di dipendenza continuo e discreto.

Analogamente, non può esserci convergenza nel caso in cui si consideri lo schema numerico ottenuto sostituendo entrambe le derivate con differenze in avanti, ovvero lo schema

$$(4.9) \quad \begin{cases} u_{i,j+1} = (1 + \alpha)u_{ij} - \alpha u_{i+1,j}, \\ u_{i0} = \varphi(x_i), \quad u_{0j} = \psi(t_j). \end{cases}$$

In questo schema, u_{ij} dipende dai nodi indicati in figura, e quindi da scisse situate a destra di x_i , mentre la soluzione esatta è influenzata dal punto C che si trova a sinistra di x_i .

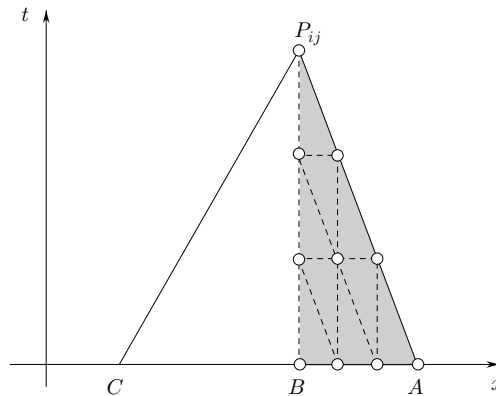


Fig. 11. Domini di dipendenza discreto e continuo per lo schema (4.9).

Queste considerazioni mettono in evidenza che, per la convergenza di uno schema discreto, è necessario che il dominio di dipendenza discreto contenga il dominio di dipendenza continuo. Questa è la condizione di Courant-Friedrichs-Lewy; e per il metodo upwind, tenendo conto dell'inclinazione delle rette AP_{ij} , BP_{ij} , si traduce nella condizione $\frac{k}{h} \leq \frac{1}{c}$, ovvero nella

$$(4.10) \quad \alpha = \frac{ck}{h} \leq 1.$$

Il numero α è detto *numero di Courant*, e la (4.10) produce la situazione descritta in figura 12.

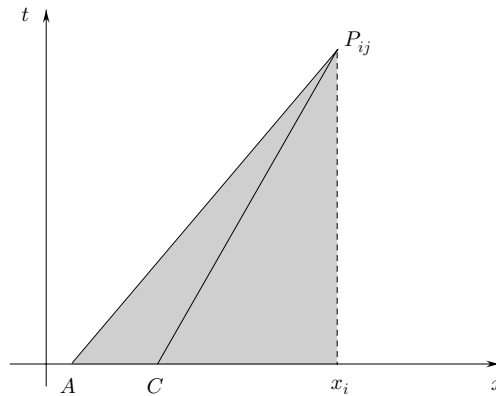


Fig. 12. Condizione di Courant-Friedrichs-Lewy.

Mostriamo ora che la condizione (4.10), è anche *sufficiente* per la *stabilità condizionata* dello schema upwind.

Dato un generico intero positivo N , si consideri l'insieme di nodi di indici i, j con $i = 1, 2, \dots, N$; $j \geq 0$; introdotti i vettori

$$(4.11) \quad U_j = [u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{Nj}]^T,$$

$$(4.12) \quad V_j = [u_{0j}, 0, \dots, 0]^T = [\psi(t_j), 0, \dots, 0]^T$$

utilizzando la formula di Taylor arrestata al 1° ordine, si può scrivere

$$(4.23) \quad \begin{cases} u(x, t+k) = u(x, t) + ku_t(x, t) + O(k^2) \\ u(x-h, t) = u(x, t) - hu_x(x, t) + O(h^2) \end{cases}$$

e quindi si ha (crf. (3.19))

$$(4.24) \quad \tau(x, t) = L_R u(x, t) - Lu(x, t) = O(h+k).$$

In base al teorema di equivalenza di Lax, il metodo upwind è dunque *condizionatamente convergente*. Ciò può essere visto anche direttamente; consideriamo l'errore globale, cioè

$$(4.25) \quad e(x, t) = u(x, t) - \bar{u}(x, t);$$

dove \bar{u} è la soluzione approssimata, tale che $\bar{u}(x_i, t_j) = u_{ij}$, ed osserviamo che, dalla (4.22), scritta in (x_i, t_j) , tenendo conto che u è soluzione dell'equazione $Lu = 0$, segue $\tau(x_i, t_j) = L_R u(x_i, t_j)$ ovvero

$$(4.26) \quad u(x_i, t_{j+1}) = (1-\alpha)u(x_i, t_j) + \alpha u(x_{i-1}, t_j) + k\tau(x_i, t_j).$$

Considerando allora i vettori (4.11) e (4.12) e inoltre i vettori

$$\begin{aligned} W_j &= [u(x_1, t_j), u(x_2, t_j), \dots, u(x_N, t_j)]^T \\ T_j &= [\tau(x_1, t_j), \tau(x_2, t_j), \dots, \tau(x_N, t_j)]^T, \quad e_j = W_j - U_j \end{aligned}$$

le relazioni (4.26) possono essere sintetizzate nella forma, analoga alla (4.14),

$$(4.27) \quad W_{j+1} = AW_j + \alpha V_j + kT_j.$$

Sottraendo da questa la (4.14) si ha

$$(4.28) \quad e_{j+1} = Ae_j + kT_j$$

e quindi, procedendo ricorsivamente, si ricava

$$(4.29) \quad e_{j+1} = A^{j+1}e_0 + k \sum_{i=1}^{j+1} A^{j+1-i} T_{j-i}.$$

Da questa relazione si evidenzia che all'errore globale contribuiscono l'errore di troncamento e l'errore sui dati, attraverso la propagazione prodotta dalla matrice A , e si riconosce la implicazione, già nota per le equazioni differenziali ordinarie: stabilità + consistenza = convergenza.

III 4.1. Metodo leapfrog; metodo di Lax-Wendroff

Il metodo *leapfrog* utilizza le differenze centrali per entrambe le derivate; ricordando le formule (3.6), (3.9), si ha lo schema

$$(4.30) \quad u_{i,j+1} = u_{i,j-1} - \alpha(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}),$$

che risulta del secondo ordine e quindi consistente, in quanto, come segue ancora da (3.6) e (3.9), l'errore di troncamento locale è $O(h^2 + k^2)$. Si tratta di un metodo *esplicito, a tre livelli*; procedendo come già visto per il metodo upwind, è possibile dimostrare che lo schema è *condizionatamente stabile*, e quindi convergente, sotto la condizione sul numero di Courant:

$$(4.31) \quad \alpha < 1.$$

e quindi si ha

$$\|A^{-1}\|_1 \leq \frac{1}{\alpha + 1} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k = 1;$$

indipendentemente da h e k . Si conclude che lo schema è *incondizionatamente stabile*.

Il *metodo di Crank-Nicolson* è espresso da

$$u_{i,j+1} - u_{ij} = \frac{\alpha}{4} (u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j} - u_{i-1,j});$$

ad ogni livello temporale si deve risolvere un sistema lineare, ma si tratta di un metodo che presenta una buona combinazione di accuratezza e stabilità; si può infatti dimostrare che l'errore di troncamento locale è $O(h^2 + k^2)$ e che il metodo è *incondizionatamente stabile*.

III 5. Equazioni iperboliche

Le equazioni iperboliche intervengono nella modellizzazione di problemi di trasporto, diffusione di neutroni, trasferimento di radiazioni, onde meccaniche, gasdinamica, vibrazioni, e altri.

La trattazione della soluzione numerica per equazioni iperboliche del secondo ordine sarà sviluppata con riferimento all'equazione delle onde

$$(5.1) \quad u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

ma i metodi che verranno descritti sono applicabili ad equazioni iperboliche di forma più generale.

Le linee caratteristiche della (5.1) sono le rette di equazione

$$(5.2) \quad x \pm ct = \text{cost}$$

e, come già visto nell'Esempio 1.2, la soluzione generale di (5.1) è data da

$$(5.3) \quad u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

dove f e g sono funzioni arbitrarie, derivabili due volte. La soluzione è dunque il risultato di due segnali che si propagano mantenendosi costanti lungo le caratteristiche.

Per l'equazione delle onde si pongono due tipi di problemi, entrambi di notevole interesse sia dal punto di vista matematico che da quello fisico, il problema ai valori iniziali, di tipo Cauchy; e il problema ai valori iniziali e al contorno. Il primo è della forma

$$(5.4) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x); \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

con φ e ψ funzioni assegnate; l'insieme Ω di integrazione è il semipiano delle $t > 0$; fisicamente, questo problema si presenta quando si vogliono studiare le vibrazioni di una corda indefinita (disposta, in condizioni di riposo, lungo l'asse x), di cui siano assegnate la configurazione e la velocità all'istante $t = 0$.

Nel problema ai valori iniziali e al contorno che prenderemo in esame, sono assegnate 4 funzioni $\varphi(x)$, $x \in [0, a]$; $\psi(x)$, $x \in (0, a)$; $g_1(t)$, $g_2(t)$, $t \geq 0$ e si cerca la soluzione di (5.1) soddisfacente le condizioni di tipo Dirichlet

$$(5.5) \quad \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x); \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq a \quad (0 < x < a) \\ u(0, t) = g_1(t); \quad u(a, t) = g_2(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

il dominio di integrazione è la semistriscia $[0, a] \times [0, +\infty)$; per evitare discontinuità si assume generalmente $g_1(0) = \varphi(0)$, $g_2(0) = \varphi(a)$. Fisicamente, questo problema proviene dallo studio delle vibrazioni di una corda di lunghezza finita (tesa lungo l'intervallo $[0, a]$, in condizioni di riposo), quando siano assegnate configurazione e velocità iniziali e la legge con cui vengono spostati gli estremi; può essere, ad esempio $g_1 = g_2 = 0 \forall t$, nel caso che gli estremi siano fissi

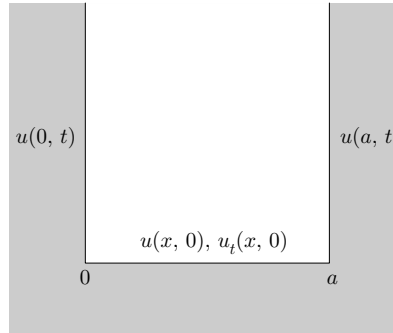


Fig. 13. Dominio del problema ai limiti e ai valori iniziali.

Si noti che le condizioni iniziali anche per questo problema, sono dello stesso tipo di quella del problema di Cauchy.

Sia questo problema che il problema di Cauchy sono ben posti. Il problema di Cauchy è risolto *analiticamente* mediante la formula di D'Alembert, il problema (5.1), (5.5) mediante uno sviluppo in serie. Va però detto che questi metodi non possono essere estesi ad equazioni di tipo più generale; inoltre, anche le soluzioni così individuate possono richiedere, per l'effettiva valutazione, strumenti numerici. È pertanto opportuno, quando non indispensabile, disporre di metodi numerici per la soluzione dei problemi ai limiti e ai valori iniziali. Alla trattazione di questo tema premettiamo la costruzione analitica della formula di D'Alembert, che fornisce lo spunto per alcune considerazioni di interesse primario anche per la comprensione delle proprietà dei metodi numerici.

III 5.1. Formula di D'Alembert

Considerato il problema di Cauchy (5.1), (5.4), dall'espressione (5.3) della soluzione generale di (5.1), sostituita nelle condizioni (5.4), si ricava

$$(5.6) \quad f(x) + g(x) = \varphi(x),$$

$$(5.7) \quad f'(x) - g'(x) = \frac{1}{c} \psi'(x),$$

considerando l'integrale indefinito di (5.7) si ottiene

$$(5.8) \quad f(x) - g(x) = \frac{1}{c} \int_0^x \psi(u) du + A$$

con A costante arbitraria; combinando (5.6) e (5.8) si ricava

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[\varphi(x) + \frac{1}{c} \int_0^x \psi(z) dz + A \right]$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \left[\varphi(x) - \frac{1}{c} \int_0^x \psi(z) dz - A \right]$$

da cui, tenendo conto di (5.3), segue

$$(5.9) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(z) dz.$$

Questa è la *formula di D'Alembert*, che dà la soluzione del problema di Cauchy, con i dati assegnati su una linea che *non* è caratteristica.

Dalla (5.9) segue che, considerato un generico punto $P^*(x^*, y^*)$, la soluzione in P^* dipende *solo* dai valori dei dati in $[x^* - ct^*, x^* + ct^*]$. L'intervallo $I = [x^* - ct^*, x^* + ct^*]$ è detto *intervallo di dipendenza* del punto P^* ; il triangolo, avente base I e vertice opposto P^* , risulta delimitato dalle linee caratteristiche per P^* , ed è denominato *dominio di dipendenza continuo* del punto P^* ; la conoscenza dei dati su I determina univocamente la soluzione solo in T_1 . D'altra parte, il triangolo T_2 di vertice P^* , anche esso delimitato da linee caratteristiche, è detto *dominio di influenza* di P^* , perché il valore della soluzione in P^* influenza la soluzione in tutti i punti di T_2 .

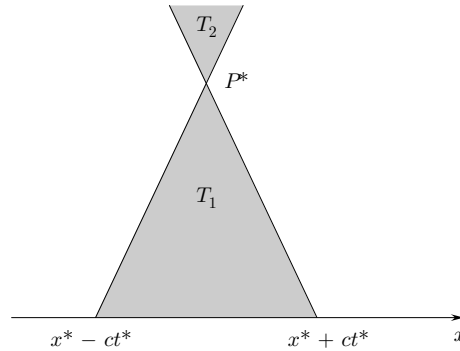


Fig. 14. Intervallo e dominio di dipendenza continui.

In modo figurato, si può dire che un osservatore situato in P^* avverte gli effetti di ciò che è accaduto in T_1 , ma *non* di ciò che avviene al di fuori di T_1 , e al contempo l'effetto di un disturbo in P^* può essere avvertito solo nel dominio T_2 . Si noti poi che l'espressione di D'Alembert rimane valida anche se i dati sono assegnati solo su un intervallo limitato o illimitato superiormente (o inferiormente). Però, segue dalla (5.9) che, se le condizioni sono assegnate solo su un intervallo, diciamo $[0, a]$ dell'asse x , la soluzione può essere individuata solo nel triangolo di base $[0, a]$, delimitato dalle due caratteristiche per $(0, 0)$ ed $(a, 0)$ rispettivamente. Se le condizioni sono assegnate su $[0, +\infty)$, la soluzione è determinata solo al di sotto della linea caratteristica passante per l'origine, quindi, in entrambi i casi, per determinare la soluzione nelle zone residue, occorrono altre condizioni.

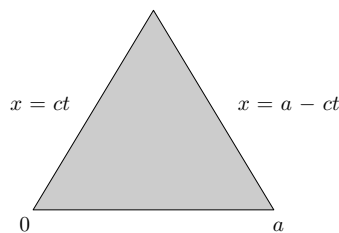


Fig. 15. Caratteristiche per $x = 0$, $x = a$.

Infine, notiamo che se φ o ψ ha una discontinuità in un certo punto x_0 , dalla (5.3) segue che la discontinuità apparirà, al tempo t , nelle posizioni $x_0 \pm ct$; quindi le caratteristiche sono le *linee lungo le quali si propagano le discontinuità*.

III Esempio 5.1

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

La formula di D'Alembert fornisce la soluzione

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[(x+t)^2 + (x-t)^2 + \int_{x-t}^{x+t} \frac{\sin z}{z} dz \right]$$

che per essere valutata numericamente richiede l'uso di una formula di quadratura o di uno sviluppo in serie della funzione integranda.

III 5.2. Schema esplicito alle differenze finite per i problemi ai valori iniziali e al contorno

Costruiamo ora uno schema numerico per approssimare la soluzione di un problema del tipo (5.1), (5.4). Per semplificare l'esposizione, eseguiamo il cambio di variabili: $y = ct$ nella (5.1) ed associamo le condizioni iniziali e al contorno qui di seguito indicate, ottenendo il problema seguente

$$(5.10) \quad \begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = 0, & x \in (0, 1), \quad y > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq 1, \\ u_y(x, 0) = \psi(x) & 0 < x < 1, \\ u(0, y) = u(1, y) = 0, & y \geq 0 \end{cases}$$

Consideriamo sul dominio $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, y \geq 0\}$, un reticolo R di nodi equispaziati $P_{ij} = (x_i, y_j)$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$; $h = 1/N$; $y_j = jk$, $j = 0, 1, 2, \dots$; approssimiamo le derivate nei nodi di R con le formule (3.10) (3.11) e la derivata $u_y(x_i, 0)$ con la (3.7), ossia ponendo

$$(5.11) \quad u(x_i, 0) = \frac{u(x_i, y_1) - u(x_i, y_{-1})}{2k} + O(k^2),$$

da cui trascurando i termini d'errore e indicando con u_{ij} i valori approssimati della soluzione nei nodi, e posto $\varphi_i = \varphi(x_i)$, $\psi_i = \psi(x_i)$, si ottiene il seguente schema discreto

$$(5.12) \quad \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} - \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{k^2} = 0$$

cui vanno aggiunte le condizioni assegnate; semplificando si ha

$$(5.13) \quad \begin{cases} u_{i,j+1} = 2u_{ij} - u_{i,j-1} + \frac{k^2}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) \\ u_{i,0} = \varphi_i \\ \frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2k} = \psi_i, & i = 1, 2, \dots, N-1 \\ u_{0j} = u_{Nj} = 0, & j = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Tenendo conto dell'ordine di grandezza degli errori di troncamento trascurati, si ha dunque uno schema del 2° ordine, esplicito, che genera la soluzione discreta allo stadio $j+1$, a partire dai valori agli stadi j e $j-1$. Si noti che la terza equazione consente di ottenere i valori $u_{i,-1}$;

$$(5.14) \quad u_{i,-1} = u_{i1} - 2k \psi_i.$$

In definitiva, posto

$$(5.15) \quad \alpha = \frac{k}{h}$$

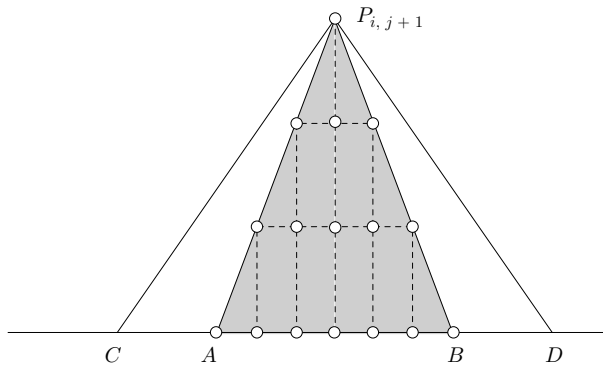


Fig. 16. Dominio di dipendenza discreto.

si previene al seguente schema esplicito

$$(5.16) \quad \begin{cases} u_{i,j+1} = \alpha^2 u_{i-1,j} + 2(1 - \alpha^2) u_{ij} + \alpha^2 u_{i+1,j} - u_{ij-1} & j=1, 2 \\ u_{i1} = \frac{1}{2} \alpha^2 (\varphi_{i-1} + \varphi_{i+1}) + (1 - \alpha^2) \varphi_i + k \psi_i & i, 1, 2, \dots, N-1 \\ u_{i0} = \varphi_i \end{cases}$$

da cui è evidente che la soluzione discreta in $P_{i,j+1}$ dipende dai nodi indicati in figura e contenuti nel triangolo delimitato dalle rette $P_{i,j+1}A$ e $P_{i,j+1}B$ aventi coefficienti angolari $\pm k/h$, detto *dominio di dipendenza discreto*. Se la situazione è quella indicata in figura, dove $P_{i,j+1}C$ e $P_{i,j+1}D$ sono le caratteristiche per $P_{i,j+1}$, di coefficienti angolari ± 1 , mentre $\alpha = \frac{k}{h} < 1$, è evidente che una variazione dei dati su AC e su BD , modifica la soluzione $u(P_{i,j+1})$, che dipende dai dati su *tutto* CD , ma *non* influenza la soluzione discreta, che dipende dai dati su AB , rimasti invariati. Dunque non ci potrà essere convergenza della soluzione discreta alla continua, se il dominio di dipendenza discreto non contiene quello continuo. La condizione che il dominio di dipendenza discreto contenga quello continuo è la *condizione di Courant-Friedrichs-Lewy* e si traduce nella

$$(5.17) \quad \alpha = \frac{k}{h} \leq 1.$$

Questa è una condizione solo *necessaria* di *convergenza*, ma, come ora dimostreremo, è anche *sufficiente* per avere *stabilità condizionata*, e quindi anche convergenza condizionata, in base al criterio di Lax, in quanto lo schema considerato è consistente per costruzione.

Passiamo ad analizzare la stabilità.

Introdotti i vettori

$$(5.18) \quad U_j = [u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{N-1,j}]^T; \quad U_0 = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}]^T$$

e la matrice A di dimensioni $N-1$, tridiagonale simmetrica

$$(5.19) \quad A = \begin{bmatrix} 2(1 - \alpha^2) & \alpha^2 & & 0 \\ \alpha^2 & 2 & & \\ & \alpha^2 & 2 & \\ & & 0 & \alpha^2 & 2(1 - \alpha^2) \end{bmatrix} = 2I - \alpha^2 T$$

dove T è la matrice (3.25), lo schema (5.16) può essere posto nella forma vettoriale

$$(5.20) \quad U_{j+1} = AU_j - U_{j-1}.$$

Se si produce una perturbazione E_0 sul vettore U_0 , l'errore propagato allo stadio $j+1$ soddisfa anche l'equazione (5.20)

$$(5.21) \quad E_{j+1} = AE_j - E_{j-1}$$

ovvero E_{j+1} soddisfa un *sistema alle differenze*, che è la forma vettoriale di un'equazione alle differenze. In analogia con queste ultime, la soluzione di (5.20), o di (5.21) va ricercata nella forma $\beta^j V$, dove V è un vettore e β uno scalare non nullo. Imponendo che $\beta^j V$ soddisfi (5.21) si ottiene

$$(5.22) \quad \beta^{j+1}V - A\beta^jV + \beta^{j-1}V = 0$$

da cui

$$(5.23) \quad AV = \frac{\beta^2 + 1}{\beta}V$$

il che significa che V e $\frac{\beta^2+1}{\beta}$ sono autovettore ed autovalore della matrice A ; indicando con λ il generico autovalore di A , β deve essere tale che

$$(5.24) \quad \frac{\beta^2 + 1}{\beta} = \lambda.$$

Ora, affinché la soluzione di (5.21), e quindi l'errore propagato, si mantenga limitato, deve risultare $|\beta| \leq 1$; poiché A , e di conseguenza i suoi autovalori, dipendono da α , questa condizione si rifletterà in una condizione su α e quindi sulla scelta dei passi di discretizzazione.

La (5.24) implica

$$\beta = \frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - 1};$$

se risultasse $|\lambda| > 2$, uno dei due valori β avrebbe modulo maggiore di 1; si deve quindi assumere $|\lambda| < 2$, il caso $|\lambda| = 2$ essendo da escludere come vedremo.

Gli autovalori di A sono dati da (cfr. (3.26))

$$\lambda_i = 2 - 4\alpha^2 \sin^2 \frac{i\pi}{2N}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

e da qui si deduce non solo che $\lambda = 2$ solo se $\alpha = 0$, (il che è impossibile), ma anche che $|\lambda_i| < 2$ implica

$$\alpha^2 < \frac{1}{\sin^2 \frac{i\pi}{2N}}; \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Poiché $\sin^2 \frac{i\pi}{2N} < 1$, $\lim_{N \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{i\pi}{2N} = 1$, si conclude che lo schema è stabile se

$$\alpha \leq 1.$$

III 6. Equazioni di tipo parabolico

III 6.1. Introduzione

Le equazioni di tipo parabolico sorgono nella modellizzazione di problemi di stato non stazionario, nei quali è importante il trasporto per conduzione o diffusione, quali: conduzione del calore in un mezzo isotropo, filtrazione di fluidi attraverso mezzi porosi, e vari altri. Tipica è *l'equazione del calore*

$$(6.1) \quad u_{xx} = u_t$$

che descrive, in forma adimensionale, la diffusione del calore in una sbarra isotropa, termicamente isolata. Questa equazione, benché di forma semplice, si presta ad illustrare le tecniche di soluzione numerica, che verranno ora introdotte e che possono però essere applicate ad equazioni di tipo parabolico di forma più generale, anche non lineari. Anche per la (6.1), come per l'equazione delle onde, sono di interesse fondamentale nelle applicazioni, due tipi di problemi; ai valori iniziali, e misti ai valori iniziali e al contorno. Come si deduce facilmente dalla (2.30), l'equazione del calore ha un solo sistema di linee caratteristiche reali, di equazione

$$(6.2) \quad t = \text{cost},$$

ciò implica che per la (6.1) il problema di Cauchy è impossibile o indeterminato se u e u_t sono assegnate lungo l'asse x , a differenza, come si è visto nel precedente paragrafo, di ciò che avviene per l'equazione delle onde.

Si dimostra che ammette invece soluzione unica il seguente problema ai valori iniziali

$$(6.3) \quad \begin{cases} u_{xx} = u_t, & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

e che la soluzione è esprimibile nella seguente forma analitica [A. Ghizzetti - F. Rosati - *Analisi Matematica*, Vol. II, Masson, 1993]:

$$(6.4) \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\xi)^2/4t} f(\xi) d\xi.$$

Dalla (6.4) si deduce subito che se $f(x) > 0$ in un intervallo aperto dell'asse x e $f(x) \equiv 0$ altrove, allora $u(x, t) > 0$, per ogni x e per ogni $t > 0$, anche molto piccolo, ovvero il calore *non si propaga ma si diffonde* (ossia si propaga a velocità infinita). Dalla (6.4) si deduce che, in ogni punto $P = (x, y)$, la soluzione dipende dai valori del dato *su tutto* \mathbb{R} , che è quindi *l'intervallo di dipendenza continuo* di P , per il problema (6.3).

Come problema misto ai valori iniziali e al contorno prendiamo in esame il seguente

$$(6.5) \quad \begin{cases} u_{xx} = u_t & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = g(t), & t \geq 0, \\ u(1, t) = l(t), & t \geq 0, \end{cases}$$

fisicamente equivalente alla determinazione della temperatura u in ogni punto x e in ogni istante t , di un filo metallico, di lunghezza unitaria, termicamente isolato, quando siano assegnate la temperatura al tempo iniziale $t = 0$, e il modo di variare della temperatura agli estremi.

Anche per questo problema si dimostra l'esistenza di un'unica soluzione, avente la seguente

espressione analitica [A. Ghizzetti - F. Rosati - *Analisi Matematica*. Vol II, Masson, 1993]

$$(6.6) \quad u(x, t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2 \pi^2 t} \sin k \pi x \left\{ \int_0^1 f(\xi) \sin k \pi \xi d\xi + k \pi \int_0^t e^{k^2 \pi^2 \tau} [g(\tau) - (-1)^k l(\tau)] d\tau \right\}.$$

Questa espressione evidenzia che in ogni punto $P = (x, y)$, la soluzione dipende dai valori dei dati nel dominio rettangolare $[0, 1] \times [0, t]$, che pertanto costituisce il *dominio di dipendenza continuo* del punto P , per il problema (6.5), mentre $[0, 1]$ ne è l'*intervallo di dipendenza continuo*.

Le espressioni (6.4) e (6.6), benché risolvano completamente i problemi (6.3) e (6.5) rispettivamente, non sempre, tuttavia, sono facilmente valutabili se non mediante metodi di approssimazione numerica; inoltre, i metodi che conducono alla costruzione di tali soluzioni non si possono estendere a problemi non lineari. Pertanto, è di considerevole interesse disporre di metodi numerici per la soluzione dei citati problemi. Nella descrizione di alcuni metodi alle differenze, faremo riferimento, in particolare, al problema (6.5), benché la maggior parte delle tecniche che vedremo si adattino anche alla trattazione del problema (6.3).

III 6.2. Un metodo esplicito

Discretizziamo il problema (6.5), introducendo innanzi tutto una reticolazione R sul dominio $D = [0, 1] \times [0, \infty)$, dividendo $[0, 1]$ e $[0, \infty)$ mediante i punti x_i e t_j rispettivamente; con

$$\begin{aligned} x_i &= ih, & i &= 0, 1, \dots, N; \\ t_j &= jk, & k &= 0, 1, \dots \end{aligned}$$

h e k sono i *passi* della reticolazione.

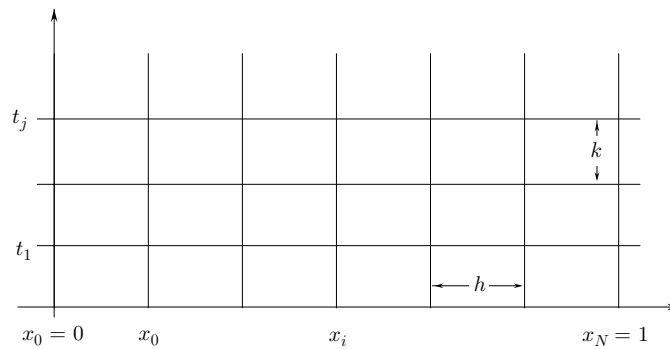


Fig. 17.

Approssimando le derivate parziali nel generico nodo (x_i, t_j) , rispettivamente con la (3.10) per la u_{xx} , e con la (3.7) per la u_t , si ottiene lo schema seguente dove, come al solito con u_{ij} si intendono i *valori approssimati* della soluzione $u(x_i, t_j)$, che si generano con lo schema costruito

$$(6.7) \quad \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} = \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k}, \quad h = \Delta x; \quad k = \Delta t.$$

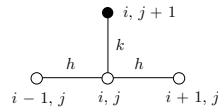
Posto

$$(6.8) \quad \alpha = \frac{k}{h^2}$$

la (6.7) diventa

$$(6.9) \quad u_{i,j+1} = \alpha u_{i-1,j} + (1 - 2\alpha)u_{i,j} + \alpha u_{i+1,j}$$

la cui corrispondente “molecola computazionale” è



Associando alla (6.9) le condizioni assegnate, si ha il seguente *metodo numerico esplicito*

$$(6.10) \quad \begin{cases} u_{i,j+1} = \alpha u_{i-1,j} + (1 - 2\alpha)u_{i,j} + \alpha u_{i+1,j}, \\ u_{i0} = f_i & i = 0, 1, \dots, N, \\ u_{0,j+1} = g_{j+1} & j \geq 0, \\ u_{N,j+1} = l_{j+1} & j \geq 0, \end{cases}$$

dove $f_i = f(x_i)$, $g_j = g(t_j)$, $l_j = l(t_j)$.

Lo schema così ottenuto consente di calcolare la soluzione approssimata $u_{i,j+1}$ al *livello temporale* $j + 1$, esplicitamente dalla conoscenza dei valori al *livello temporale* j . Il *dominio di dipendenza discreto* di $P_{ij} = (x_i, t_j)$, come segue dalla prima equazione in (6.10), è il triangolo indicato in figura, delimitato dalle rette di pendenza $\pm \frac{k}{h}$, e quindi l'*intervallo di dipendenza discreto* è il segmento $[x - \frac{h}{k}t, x + \frac{h}{k}t]$. È allora chiaro che affinché sia soddisfatta una condizione, analoga a quella di Courant-Friedrichs-Lewy, si deve avere che, per h e k tendenti a zero, tenda a zero anche il rapporto $\frac{k}{h}$, altrimenti l'intervallo di dipendenza discreto non tende a contenere quello di dipendenza continuo, e ciò significa che può non verificarsi la convergenza della soluzione discreta a quella continua.

Se, al tendere a zero dei passi della reticolazione, il rapporto $\frac{k}{h^2} = \alpha$ (cfr. (6.8)) si mantiene costante, allora $\frac{k}{h} = \alpha h \rightarrow 0$ e la condizione sui domini di dipendenza è soddisfatta. Questo però non è sufficiente ad assicurare la convergenza.

Se però, oltre a mantenersi costante, il rapporto $\alpha = \frac{k}{h^2}$ verifica la condizione

$$(6.11) \quad \alpha \leq \frac{1}{2}$$

allora il metodo è stabile. Per dimostrare questa affermazione, scriviamo la (6.10) in forma vettoriale

$$(6.12) \quad U_{j+1} = AU_j + \alpha V_j$$

in cui si sono introdotti i vettori

$$U_j = [u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{N-1,j}]^T; \quad V_j = [u_{0,j}, 0, \dots, 0, u_{Nj}]^T$$

e la matrice di dimensioni $N - 1$ tridiagonale, simmetrica

$$(6.13) \quad A = \begin{bmatrix} 1 - 2\alpha & & & & \\ \alpha & 1 - 2\alpha & & & \\ & \alpha & 1 - 2\alpha & & \\ & & \alpha & 1 - 2\alpha & \\ & & & \alpha & 1 - 2\alpha \end{bmatrix} = I - \alpha T$$

dove T è la matrice (3.25).

Una perturbazione E_0 su U_0 (per semplicità, supponiamo di non introdurre perturbazioni ai bordi e quindi su V_j) dà luogo al vettore

$$(6.14) \quad \tilde{U}_0 = U_0 + E_0$$

e si propaga generando i vettori modificati $\tilde{U}_j = U_j + E_j$, per i quali risulta

$$(6.15) \quad \tilde{U}_{j+1} = A\tilde{U}_j + V_j.$$

Sottraendo (6.12) da (6.15) si ottiene

$$E_{j+1} = AE_j = A^j E_0;$$

quindi, considerando norme compatibili, si ha

$$(6.16) \quad \|E_{j+1}\| \leq \|A\|^j \|E_0\|,$$

pertanto si conclude che l'errore si mantiene limitato in norma, se $\|A\| \leq 1$. Supponiamo ora soddisfatta la (6.11); allora risulta, *indipendentemente da N* ,

$$(6.17) \quad \|A\|_\infty = \|A\|_1 = \alpha + (1 - 2\alpha) + \alpha = 1$$

cioè, la (6.11) è sufficiente per *la stabilità*, in norma uniforme o in norma 1.

Alla stessa conclusione si giunge anche se si considera la norma spettrale, per la quale, essendo A simmetrica si ha:

$$(6.18) \quad \|A\|_2 = \rho(A);$$

gli autovalori di A sono dati da (cfr. (3.26))

$$(6.19) \quad \lambda_i = 1 - 4\alpha \sin^2 \frac{i\pi}{2N}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

e quindi sarà $\rho(A) \leq 1$ quando

$$(6.20) \quad \left| 1 - 4\alpha \sin^2 \frac{i\pi}{2N} \right| \leq 1,$$

ossia quando

$$(6.21) \quad 2\alpha \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{i\pi}{2N}}.$$

Ricordando che per $k \rightarrow 0$, anche h deve tendere a zero e quindi N all'infinito, osservando che il minimo valore del secondo membro di (6.21) è raggiunto per $i = N-1$, e che $\lim_{N \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{(N-1)\pi}{2N} = 1$, si conclude che la (6.11) è condizione sufficiente anche per la limitatezza in norma 2, dell'errore propagato.

In conclusione, lo schema (6.10) è *condizionatamente stabile*. Verifichiamone ora la consistenza.

In questo caso, in base alle (3.17), (3.18), si ha

$$(6.22) \quad L_R u(x, t) = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} + \\ - \frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{k} = O(h^2 + k),$$

dalla (3.19) segue allora ($Lu = 0$, perché u è soluzione)

$$(6.23) \quad \tau(x, t) = L_R u - Lu = O(h^2 + k).$$

In base al teorema di equivalenza di Lax, il metodo è quindi *condizionatamente convergente*, essendo condizionatamente stabile, per $\alpha \leq \frac{1}{2}$, e consistente.

Concludiamo con le seguenti due osservazioni. La prima riguarda la scelta

$$(6.24) \quad \alpha = \frac{1}{6},$$

in questo caso, con semplici passaggi che però omettiamo, si può dimostrare che lo schema (6.10) è accurato con ordine $(h^4 + k^2)$, e la prima equazione (6.10) ha l'espressione

$$(6.25) \quad u_{i,j+1} = \frac{1}{6}[u_{i-1,j} + 4u_{i,j} + u_{i+1,j}].$$

La seconda osservazione riguarda le condizioni assegnate; può avvenire che nei nodi $(0,0)$ e $(0,1)$ le condizioni iniziali e quelle al contorno non coincidano; in tal caso la soluzione presenta una discontinuità in quei punti, discontinuità che può essere ignorata assumendo uno solo dei valori dei dati. In alternativa si può porre

$$u_{0,0} = \frac{1}{2}[f(0) + g(0)]$$

e analogamente si può procedere per $u_{N,0}$.

III Esempio 6.1

Risolvere numericamente il problema

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases} \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(1, t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

mediante lo schema (6.10) con $h = 0.1$, $\alpha = 0.1$, $j = 1, \dots, 10$.

Confrontare il risultato numerico per $x = 0.3$, $t = 0.01$ con il valore esatto, che è dato da:

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{n\pi}{2} \right) (\sin \pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}.$$

Dalla (6.8) si deduce $k = \alpha h^2 = 0.001$, e la prima delle (6.10) è data da

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{10}(u_{i-1,j} + 8u_{i,j} + u_{i+1,j}).$$

I valori iniziali per $j = 0$ sono i seguenti

$$\begin{aligned} u_{0,0} = 0, \quad u_{1,0} = 0.2, \quad u_{2,0} = 0.4, \quad u_{3,0} = 0.6, \quad u_{4,0} = 0.8, \\ u_{5,0} = 1, \quad u_{6,0} = 0.8, \quad u_{7,0} = 0.6, \quad u_{8,0} = 0.4, \quad u_{9,0} = 0.2, \quad u_{10,0} = 0. \end{aligned}$$

Con questi si generano i valori ai vari livelli j , di cui riportiamo nella seguente tavola solo i valori relativi a $i = 1, \dots, 6$; sfruttando la simmetria dei dati si ottengono i residui valori simmetrici rispetto a $x = \frac{1}{2}$.

i	1	2	3	4	5	6
$j = 1$	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	0.9600	0.8000
$j = 2$	0.2000	0.4000	0.6000	0.7960	0.9280	0.7960
$j = 3$	0.2000	0.4000	0.5996	0.7896	0.9016	0.7896
.....						
$j = 10$	0.1996	0.3968	0.5822	0.7281	0.7867	0.7281
.....						

Il valore evidenziato è l'approssimazione di

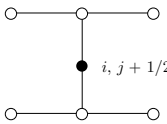
$$u(0.3, 0.01) = 0.5799$$

ed è da considerarsi abbastanza accurato.

Concludiamo osservando che la distribuzione iniziale della temperatura può essere realizzata scaldando il centro della barra e tenendo gli estremi a contatto con del ghiaccio.

6.3. Il metodo di Crank-Nicolson

La condizione $\alpha \leq \frac{1}{2}$, comporta l'uso di passi temporali di ampiezza ridotta, e può risultare computazionalmente onerosa. Questa limitazione può essere evitata affrontando il problema con qualche metodo implicito, che risulti incondizionatamente stabile; in particolare, qui presentiamo lo *schema di Crank-Nicolson*. Questo schema viene costruito approssimando i valori delle derivate parziali nel punto $(x_i, t_{j+1/2})$ anziché nel punto (x_i, t_j) . La derivata $u_{xx}(x_i, t_{j+1/2})$ viene approssimata con la media delle differenze centrali relative ai livelli j e $j+1$ (cfr. (3.10)) e la $u_t(x_i, t_{j+1/2})$ mediante la (3.9) scritta con passo $\frac{k}{2}$; si ottiene così lo schema (6.26), la cui molecola computazionale è

$$(6.26) \quad \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{2h^2} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$$


La (6.26), usando lo stesso parametro α introdotto nella (6.8) diventa

$$(6.27) \quad -\alpha u_{i-1,j+1} + 2(1 + \alpha)u_{i,j+1} - \alpha u_{i+1,j+1} = \alpha u_{i-1,j} + 2(1 - \alpha)u_{i,j} + \alpha u_{i+1,j}.$$

Si noti che, in base alle (3.9) (3.10), lo schema è accurato al secondo ordine rispetto sia ad h che ad k ; inoltre dalla (6.27) segue che per calcolare i valori al livello $j + 1$ si deve risolvere un sistema lineare tridiagonale. Tale sistema può essere posto nella forma

$$(6.28) \quad AU_{j+1} = BU_j + \alpha(V_{j+1} + V_j)$$

dove U_j e V_j sono i vettori già introdotti nel precedente paragrafo, mentre le matrici A e B sono date da

$$(6.29) \quad A = \begin{bmatrix} 2(1+\alpha) & & & & & \\ & -\alpha & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & -\alpha & & \\ & 0 & & & & \\ & & & & -\alpha & \\ & & & & & 2(1+\alpha) \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2(1-\alpha) & & & & & \\ & \alpha & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \alpha & & \\ & 0 & & & & \\ & & & & \alpha & \\ & & & & & 2(1-\alpha) \end{bmatrix}.$$

quindi $A = 2I + \alpha T$; $B = 2I - \alpha T$, con T data da (3.25).

Ripetendo il ragionamento visto in § 6.2, si conclude che per gli errori propagati da un perturbazione E_0 su U_0 , si ha

$$(6.30) \quad E_{j+1} = C^{j+1} E_0, \quad C = A^{-1} B.$$

Si è qui invertita la matrice A che si può dimostrare essere definita positiva. Esaminiamo ora la norma spettrale di C ; si ha, tenendo conto che A^{-1} e B sono simmetriche

$$(6.31) \quad \|A^{-1}\|_2 = \rho(A^{-1}); \quad \|B\|_2 = \rho(B)$$

inoltre

$$(6.32) \quad \|C\|_2 \leq \|A^{-1}\|_2 \cdot \|B\|_2 = \rho(A^{-1}) \cdot \rho(B).$$

Gli autovalori di A^{-1} e di B sono dati rispettivamente da (cfr. (3.26))

$$(6.33) \quad \lambda_i = \frac{1}{2 + 4\alpha \sin^2 \frac{i\pi}{2N}}; \quad \mu_i = 2 - 4\alpha \sin^2 \frac{i\pi}{2N},$$

e poiché risulta, per ogni α ,

$$\left| \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right| < 1$$

la (6.32) implica che risulta $\|C\|_2 \leq 1$, e quindi l'errore si mantiene limitato in norma 2.

In conclusione il metodo di Crank-Nicolson è consistente, *incondizionatamente stabile* e quindi incondizionatamente convergente.

III Esempio 6.2

Applicare il metodo di Crank-Nicolson per calcolare le approssimazioni, ai primi due livelli temporali, della soluzione del problema

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \sin \pi x, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(1, t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

ponendo $h = 0.1$, $\alpha = 1$. Si confronti $u_{5,1}$ con il valore esatto della soluzione, data da $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$. I valori incogniti, al primo livello temporale: u_{1j} , $j = 1, \dots, 9$, soddisfano il seguente sistema di 9 equazioni, di cui per semplificare la scrittura riportiamo solo alcune delle equazioni

$$\begin{cases} 4u_{11} - u_{21} & = \sin 0.2\pi \\ -u_{11} + 4u_{21} - u_{31} & = \sin 0.1\pi + \sin 0.3\pi \\ \quad -u_{21} + 4u_{31} - u_{41} & = \sin 0.2\pi + \sin 0.4\pi \\ \dots\dots\dots & \\ \quad \quad \quad -u_{81} + 4u_{91} & = \sin 0.8\pi \end{cases}$$

Vista la simmetria rispetto a $x = \frac{1}{2}$ delle condizioni date, riportiamo solo i valori per $x = ih$, $i = 1, \dots, 5$, si ha

i	1	2	3	4	5
j=1	0.2802	0.5329	0.7335	0.8623	0.9067

il valore esatto $u(0.5, 0.01) = 0.9067$.

Il sistema può essere risolto con l'algoritmo di Thomas (cfr. § 4.12 L.G.); data la simmetria delle equazioni e della soluzione esatta, riportiamo i valori della soluzione discreta solo per $i = 1, 2, \dots, 5$, (seconda colonna); i valori della soluzione esatta sono nella terza colonna osserviamo che per $\alpha = 1$ e $h = 0.1$ si ha $k = 0.01$.

i	u_{i1}	$u(x_i, 0.01)$
1	0.2802	0.2800
2	0.5329	0.5325
3	0.7335	0.7330
4	0.8623	0.8617
5	0.9067	0.9060

Al secondo livello temporale, il sistema (6.27) assume la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} 4u_{12} - u_{22} = u_{01} + u_{21} + u_{02} = 0.5328 \\ -u_{12} + 4u_{22} - u_{32} = u_{11} + u_{31} = 1.0137 \\ \quad -u_{22} + 4u_{32} - u_{42} = u_{21} + u_{41} = 1.3952 \\ \dots\dots\dots \\ \quad \quad \quad -u_{82} + 4u_{92} = u_{81} + u_{10,1} + u_{10,2} = 0.5329 \end{array} \right.$$

I valori della soluzione discreta e della soluzione esatta sono riportati in seconda e terza colonna rispettivamente.

i	u_{i2}	$u(x_i, 0.02)$
1	0.2540	0.2537
2	0.4832	0.4825
3	0.6651	0.6641
4	0.7818	0.7807
5	0.8221	0.8209

7. Equazioni ellittiche

Le equazioni ellittiche intervengono nell'analisi delle configurazioni a regime o gli stati stazionari (indipendenti dal tempo) di problemi che negli stati non stazionari sono descritti da problemi parabolici o iperbolic; spesso si presentano nella descrizione di equilibrio in mezzi continui. Il prototipo delle equazioni ellittiche in due variabili è l'equazione di Poisson, che assumeremo come modello per la trattazione dei metodi numerici per equazioni ellittiche

$$(7.1) \quad -\Delta u = f$$

dove Δ è l'operatore laplaciano; se $f = 0$, si ha l'equazione di Laplace, già vista nell'esempio 1.3. La (7.1) descrive la temperatura stazionaria in un mezzo isotropo, i potenziali elettrostatici o gravitazionali di cavità, il potenziale di velocità del flusso di un fluido incompressibile. Dalla (2.30) si deduce che le linee caratteristiche della (7.1) sono le rette immaginarie

$$(7.2) \quad x \pm iy = \text{cost}$$

che hanno scarso interesse per la costruzione di metodi numerici.

Per le equazioni ellittiche si pongono problemi con condizioni al contorno di tipo Dirichlet o di tipo Neumann (cfr. § 2), o anche problemi agli autovalori; ad esempio

$$(7.3) \quad -\Delta u = \lambda u$$

che intervengono nello studio di deformazioni e stabilità delle strutture, nella ricerca delle frequenze naturali in problemi di vibrazioni (si ricordi l'analogo Esempio 5.1).

Qui prenderemo in esame il seguente problema di Dirichlet

$$(7.4) \quad \begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) = g(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

con $\Omega = \{(x, y) \mid x \in (0, a), y \in (0, b)\}$. Assumiamo che $\Omega \cup \partial\Omega$ possa essere reticolato con maglie quadrate di passo h , risultando $a = Nh$, $b = Mh$. Nei nodi *interni* (x_i, y_j) , $i = 1, \dots, N-1$, $j = 1, \dots, M-1$, approssimiamo le derivate parziali con le (3.10), (3.11), trascurando gli errori di troncamento $O(h^2)$, $O(h^2)$. Posto

$$(7.5) \quad f_{ij} = f(x_i, y_j), \quad g_{ij} = g(x_i, y_j)$$

il problema (7.4) viene discretizzato con il seguente schema implicito

$$(7.6) \quad \begin{cases} 4u_{ij} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1} = h^2 f_{ij}, & i = 1, \dots, N-1 \quad j = 1, \dots, M-1 \\ u_{0j} = g_{0j}, \quad u_{N,j} = g_{Nj}, & j = 0, 1, \dots, M, \\ u_{i0} = g_{i0}, \quad u_{iM} = g_{iM}, & i = 0, 1, \dots, N, \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di $(N-1)(M-1)$ equazioni in altrettante incognite avente matrice dai coefficienti simmetrica, a dominanza diagonale debole; per verificare queste affermazioni, conviene riferirsi ad un caso particolare: $N = 5$, $M = 4$. Assumendo successivamente $j = 1, 2, 3$, scriviamo la (7.5) per $i = 1, \dots, 4$; si ottiene allora il sistema seguente nel quale si considerano le incognite nell'ordine:

$$(7.7) \quad u_{11}, u_{21}, u_{31}, u_{41}; u_{12}, u_{22}, u_{32}, u_{42}; u_{13}, u_{23}, u_{33}, u_{43};$$

$$(7.8) \quad \begin{cases} 4u_{11} - u_{21} - u_{12} & = h^2 f_{11} + g_{10} + g_{01} \\ -u_{11} + 4u_{21} - u_{31} - u_{22} & = h^2 f_{21} + g_{20} \\ -u_{21} + 4u_{31} - u_{41} - u_{32} & = h^2 f_{31} + g_{30} \\ -u_{31} + 4u_{41} - u_{42} & = h^2 f_{41} + g_{51} + g_{40} \\ -u_{11} & 4u_{12} - u_{22} - u_{13} & = h^2 f_{12} + g_{20} \\ -u_{21} & -u_{12} + 4u_{22} - u_{32} - u_{23} & = h^2 f_{22} \\ -u_{31} & -u_{22} + 4u_{32} - u_{42} - u_{33} & = h^2 f_{32} \\ -u_{41} & -u_{32} + 4u_{42} - u_{43} & = h^2 f_{42} + g_{52} \\ -u_{12} & +4u_{13} - u_{23} & = h^2 f_{13} + g_{03} + g_{14} \\ -u_{13} + 4u_{23} - u_{33} & = h^2 f_{23} + g_{24} \\ -u_{32} & -u_{23} + 4u_{33} - u_{43} & = h^2 f_{33} + g_{34} \\ -u_{42} & -u_{33} + 4u_{43} & = h^2 f_{34} + g_{44} + g_{53} \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è dunque data da

$$(7.9) \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Sono evidenti le proprietà di simmetria e dominanza debole; inoltre si può dimostrare che A è *definita positiva*; pertanto il sistema è univocamente risolubile. Data la sua struttura può essere risolto in modo efficiente usando il metodo di Gauss senza pivoting o il metodo di Choleski; questi, nel caso di un numero poco elevato di incognite. Altrimenti conviene procedere con il metodo di Gauss-Seidel o con il metodo SOR.

È opportuno osservare che la matrice A può essere partizionata in blocchi, come si vede nel caso particolare (7.9), in cui risulta

$$(7.10) \quad A = \begin{pmatrix} C & D & O \\ D & C & D \\ O & D & C \end{pmatrix}$$

con ovvio significato dei simboli. Se le incognite sono ordinate con altro ordine, i blocchi che compongono la partizione di A cambiano ordine ma danno sempre luogo ad una struttura *tridiagonale* a blocchi, e ciò non solo nel caso particolare preso in esame, ma anche in generale. Per questo tipo di matrici esistono tecniche di soluzione che utilizzano i vari metodi sopra citati, adattandoli alla struttura a blocchi, anche per la determinazione del parametro ottimo di rilassamento; argomento su cui però non ci soffermiamo.

Una volta risolto il sistema, rimane da porre in relazione la soluzione discreta con quella esatta. Sono allora di interesse i seguenti due risultati.

Il primo riguarda la consistenza: il metodo è consistente del secondo ordine. Infatti, dalle (3.10), (3.11) e dalla definizione di errore locale di troncamento si ha:

$$(7.11) \quad \begin{aligned} \tau(x, y) = L_R u - Lu &= \frac{1}{h^2} [u(x+h, y) - 4u(x, y) + u(x-h, y) + \\ &+ u(x, y+h) + u(x, y-h)] - u_{xx} - u_{yy} = O(h^2). \end{aligned}$$

Tenendo conto che u è soluzione dell'equazione di Poisson, la (7.11) dà

$$(7.12) \quad \tau(x, y) = L_R u + f.$$

Vale inoltre il seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione

TEOREMA. *Data una qualsiasi funzione discreta V , definita sul reticolo $\Omega_R \cup \partial\Omega_R$ si ha*

$$(7.13) \quad \max_{\Omega_R} |V| \leq \max_{\partial\Omega_R} |V| + \frac{a^2}{2} \max_{\Omega_R} |L_R V|.$$

È allora abbastanza semplice stimare l'errore globale. Infatti, indichiamo con \bar{u} la soluzione discreta, ossia l'insieme dei valori $\{u_{ij}\}$; risulta allora

$$(7.14) \quad \begin{cases} L_R \bar{u} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega_R \\ \bar{u} = g(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega_R \\ L_R u = f(x, y) + \tau(x, y), & (x, y) \in \Omega_R \\ u = g(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega_R. \end{cases}$$

Sottraendo la 3^a equazione dalla prima, la 4^a dalla seconda, si conclude che la funzione di reticolo $V = \bar{u} - u$ verifica le relazioni

$$(7.15) \quad \begin{cases} L_R V(x, y) = \tau(x, y), & (x, y) \in \Omega_R \\ V(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega_R \end{cases}$$

e da queste, segue che in base al teorema citato e alla (7.11), per l'errore globale si può scrivere

$$(7.16) \quad \begin{aligned} \max_{(x_i, y_j) \in \Omega_R} |u(x_i, y_j) - u_{ij}| &\leq \max_{(x_i, y_j) \in \partial\Omega_R} |u(x_i, y_j) - u_{ij}| + \frac{a^2}{2} \max |L_R u(x_i, y_j) - L_R u_{ij}| = \\ &= \frac{a^2}{2} |\tau(x_i, y_j)| = \frac{a^2}{2} O(h^2). \end{aligned}$$

Ne segue l'importante proprietà che, per il metodo considerato, l'errore globale è controllato dall'errore di troncamento locale.