METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA

Corsi di Laurea a distanza in Ingegneria – Consorzio Nettuno – Polo di Roma

Prova scritta del 14-12-06

NOME e COGNOME:

EMAIL e/o CELLULARE:

Risolvere i seguenti esercizi, motivando le risposte. Questo documento è formato da 2 pagine.

---

1) Utilizzando la trasformata di Laplace, risolvere l'equazione differenziale

$$y'''(t) + y(t) \; = \; \delta_0(t)$$

con condizioni iniziali nulle ($\delta_0(t)$ è la delta di Dirac con centro in $t = 0$).

. . . .

Passando alla trasformata di Laplace unilatera, $Y = \mathcal{L}[y]$, si ottiene

$$(s^3 + 1)Y(s) = 1$$

ovvero, con semplici calcoli,

$$\begin{aligned} Y(s) \; &= \; \frac{1}{s^3+1} = \frac{1}{(s+1)(s^2-s+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{s-2}{s^2-s+1}\right) \\ &= \; \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{3}\frac{s-1/2}{(s-1/2)^2+3/4} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s-1/2)^2+3/4}. \end{aligned}$$

Pertanto, antitrasformando,

$$y(t) = u(t)\left(\frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

($u(t)$ è la funzione di Heaviside, $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$).

2) Calcolare

$$\int_{\partial D} \frac{z}{z^2 + iz + 2}\, dz$$

nei seguenti due casi:

$$(a) \qquad D = \left\{ z \in \mathbf{C} : |z| < \frac{3}{2} \right\};$$

$$(b) \qquad D = \left\{ z \in \mathbf{C} : |z| < \frac{5}{2} \right\}.$$

. . . .

Poiché $z^2 + iz + 2 = (z - i)(z + 2i)$, la funzione integranda $f(z)$ ha due poli semplici in $z = i$ e $z = -2i$, e i residui sono dati da

$$\begin{aligned} R(i) &= \lim_{z \to i} \frac{z}{z + 2i} = \frac{1}{3}, \\ R(-2i) &= \lim_{z \to -2i} \frac{z}{z - i} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Poiché $|i| < \frac{3}{2}$ mentre $\frac{3}{2} < |2i| < \frac{5}{2}$, concludiamo che

$$(a) \qquad \int_{\partial D} \frac{z}{z^2 + iz + 2}\, dz = \frac{2}{3} i\pi,$$

$$(b) \qquad \int_{\partial D} \frac{z}{z^2 + iz + 2}\, dz = 2i\pi.$$