Prova scritta — Esempio 4

1) Data la funzione

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z+3} + \frac{e^z - 1}{z^2},$$

determinare:

(a) i poli e il loro ordine;

(b) lo sviluppo in serie di Laurent centrato in $z = 0$ e il suo raggio di convergenza.

2) Data la funzione

$$f(x) \;=\; e^{-2\,|x|},$$

calcolare:

(a) la trasformata di Fourier $\mathcal{F}[f]$ (deve risultare una funzione a valori reali poiché f è pari);

(b) il prodotto di convoluzione $\mathcal{F}[f] \,\star\, \delta_0'$, dove δ_0' indica la derivata distribuzionale della delta di Dirac centrata in zero.

Risoluzioni

1) (a). Si ha

$$\lim_{z\to -3} (z+3)\, f(z) \;=\; 1, \quad \lim_{z\to 0} z\, f(z) \;=\; \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} \;=\; 1.$$

Pertanto $f(z)$ presenta poli di ordine uno in $z = -3$, $z = 0$.

(b). Si ha:

$$\frac{1}{z+3} \;=\; \frac{1}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)} \;=\; \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^{k+1}}\, z^k, \qquad |z| < 3,$$

$$\frac{e^z - 1}{z^2} \;=\; \frac{1}{z^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!} \;=\; \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)!}.$$

Pertanto

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+2)!} + \frac{(-1)^k}{3^{k+1}}\right) z^k, \qquad |z| < 3.$$

2) (a). Attraverso un calcolo diretto si ottiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|-i\omega x}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{(2-i\omega)x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(2+i\omega)x}\,dx \\ &= \frac{1}{2-i\,\omega} + \frac{1}{2+i\,\omega} = \frac{4}{4+\omega^2}.\end{aligned}$$

(b). Si osserva che

$$\mathcal{F}[f](\omega) \star \delta_0'(\omega) = \mathcal{F}[f]'(\omega) \star \delta_0(\omega) = \mathcal{F}[f]'(\omega)$$

(in quanto δ_0 è l'elemento neutro rispetto al prodotto di convoluzione).
Poiché

$$\mathcal{F}[f]'(\omega) = -\frac{8\,\omega}{(4+\omega^2)^2},$$

si conclude che

$$\mathcal{F}[f](\omega) \star \delta_0'(\omega) = -\frac{8\,\omega}{(4+\omega^2)^2}.$$