Calcolo Numerico (C.L. Elettronica, Delle Comunicazioni e Clinica)

Prof. Laura Pezza

Esercitazione d'esame del 21/05/2019

Esercitazione d'esame 1.

COGNOME E NOME

____-

Esercizio 1.

Sia data la seguente funzione

$$f(x) = arctang(g(x)), \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

con

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + x.$$

(1.1) Separare le radici della funzione utilizzando soltanto le proprietá delle funzioni;
(1.2) Utilizzare il metodo di Newton per calcolare la radice di modulo massimo con 4 cifre decimali.

Esercizio 2

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 sin(x), \quad x \in [0, 2] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(2.1) Eseguire due iterazioni con il metodo di Eulero e passo $h = 0.1$ ed una iterazione con il metodo di Heun e passo $h = 0.2$, per approssimare $y(0.2)$.
(2.2) Si provi a dimezzare il passo del metodo di Heun per approssimare $y(0.2)$ e confrontare le tre approssimazioni ottenute.

Esercitazione d'esame 2.

Esercizio 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

1. Separare gli autovalori

2. Fornire le prime due iterate del metodo delle potenze per approssimare l'autovalore di modulo massimo.

3. Discutere l'uso del metodo di Newton per approssimare l'autovalore di modulo minimo

Esercizio 2

Sia dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = ysin(x), \quad x \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Si calcoli il valore approssimato di $y(0.1)$, usando il metodo implicito del trapezio

$$y_{i+1} = y_i + h/2[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

(2.1) combinato con il metodo di Eulero-Cauchy, con due correzioni (Eulero modificato [P-C]^2);
oppure
(2.2) combinato con il metodo del punto centrale, ricordando che é un metodo a due passi.

Soluzione Esercizio 1.

1. Cerchi di Gershgorin:

$$|z-1| \leq 1, \quad |z-2| \leq 2, \quad |z-3| \leq 2, \quad |z-4| \leq 1 \Rightarrow$$

$\lambda_i \in [0,5]$ Si applica l'algoritmo di Sturm

$$\begin{aligned} p_0(\lambda) &= 1 \\ p_1(\lambda) &= \lambda - 1 \\ p_2(\lambda) &= (\lambda-2)p_1(\lambda) - p_0(\lambda) \\ p_3(\lambda) &= (\lambda-3)p_2(\lambda) - p_1(\lambda) \\ p_4(\lambda) &= (\lambda-4)p_3(\lambda) - p_2(\lambda) \end{aligned}$$

t	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	n. $\lambda_i > t$
0	1	-1	1	-2	7	4 (tutti)
5	1	4	11	18	7	0
2	1	1	-1	0	1	2 $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,2]; \lambda_3, \lambda_4 \in (2,5]$
1	1	0	-1	2	-5	3 $\lambda_1 \in [0,1], \lambda_2 \in (1,2]; \lambda_3, \lambda_4 \in (2,5]$
4	1	3	5	2	-5	1 $\lambda_1 \in [0,1], \lambda_2 \in (1,2]; \lambda_3 \in (2,4], \lambda_4 \in (4,5]$

2. A simmetrica $\Rightarrow$ n autovettori indipendenti; dalla separazione $\Rightarrow \lambda_{max} \in (4,5] \Rightarrow$ si puó applicare il metodo delle potenze.

Approssimazione iniziale $\mathbf{u}_0$ t.c. $\|\mathbf{u}_0\|_2 = 1$.

$\mathbf{u}_0 = \mathbf{e}_j$, versore $j-$mo con j indice dell' elemento diagonale di massimo modulo $\Rightarrow$

$\mathbf{u}_0 = (0,0,0,1)^T \Rightarrow \mathbf{v}_1 = A\mathbf{u}_0 = (0,0,-1,4)^T \Rightarrow \beta_1 = \mathbf{u}_0^T \mathbf{v}_1 = 4$

(Si ottiene il centro del cerchio contenente l'autovalore di modulo massimo)

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{17}, \quad \mathbf{u}_1 = (0,0,-1/\sqrt{17}, 4/\sqrt{17})^T$$

$\mathbf{v}_2 = A\mathbf{u}_1 = (0, 0, -1/c, 4/c)^T, \quad c = \sqrt{17} \Rightarrow$

$\beta_2 = \mathbf{u}_1^T \mathbf{v}_2 = -\frac{7}{c^2} + \frac{4 \cdot 17}{c^2} \approx 4.411765$ **3.** Gli autovalori sono semplici, il metodo di Newton per approssimare $\lambda_1 \in [0, 1)$ si puó applicare con $\beta_0 = 0$ e converge con ordine $p \geq 2$.

Formula di Newton: $\beta_{k+1} = \beta_k - \frac{p_4(\beta_k)}{p_4'(\beta_k)}$

$p_4(\beta_k)$ si calcola con l'algoritmo di Sturm;

$p_4'(\beta_k)$ si calcola per ricorrenza (derivando la legge per p_k)

$$\begin{aligned} p_0'(\lambda) &= 0, \quad p_1'(\lambda) = 1 \\ p_k'(\lambda) &= p_{k-1}(\lambda) + (\lambda - d_k)p_{k-1}' - s_{k-1}^2 p_{k-2}'(\lambda), \ k = 2, \cdots, n \end{aligned}$$

per $\lambda = \beta_0 = 0$ si ha:

$$\begin{aligned} p_2'(0) &= p_1(0) + (-2)p_1' - p_0' = -3 \\ p_3'(0) &= p_2(0) + (-3)p_2' - p_1' = 9 \\ p_4'(0) &= p_3(0) + (-4)p_3' - p_2' = -35 \end{aligned}$$

$\beta_1 = -\frac{7}{-35} = 0.2$