Tesine del Corso di Metodi Numerici per l'Ingegneria (CLM Chimica)

Prof.ssa Laura Pezza a.a. 2011-12.

1. Scrivere un sottoprogramma per il calcolo di A^{-1} mediante la fattorizzazione LU e/o eliminazione di Gauss e testarlo per varie matrici A (vedi libro L. Gori, M.L. Lo Cascio, F. Pitolli), tra cui le matrici di Hilbert e di Vandermonde. Confrontare i risultati con quelli ottenuti attraverso il comando >> **inv**(A) (*).

Utilizzando il sottoprogramma realizzato, scrivere un programma per il calcolo del *numero di condizionamento* di una matrice e testarlo per le suddette matrici. Confrontare i risultati con quelli ottenuti attraverso il comando >> **cond**(A) (*).

2. Scrivere tre sottoprogrammi per la soluzione di un sistema lineare tridiagonale con la fattorizzazione LU (*), con il metodo di Jacobi e con il metodo di Gauss-Seidel e testarli per vari sistemi lineari (vedi libro "Esercizi di Calcolo Numerico", L.Gori, M.L. Lo Cascio, F. Pitolli). Utilizzare i sottoprogrammi per risolvere il *sistema lineare*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} = 0, \quad \text{i=2,...,n-1} \\ -x_{n-1} + 2x_n = 1 \end{cases}$$

per $n = 20$. Confrontare l'accuratezza dei risultati ed il costo computazionale. Verificare che il metodo di Gauss-Seidel ha una velocita' di convergenza circa doppia rispetto al metodo di Jacobi.

(*) La fattorizzazione LU puo' essere sviluppata o tramite l'algoritmo di eliminazione di Gauss o con l'algoritmo di Banachiewitz-Doolittle (rif. libro di Laura Gori "Calcolo Numerico"). Per i casi tridiagonali va usato l'algoritmo di Thomas.

3. Data l'*equazione non lineare*

$$f(x) = e^{-x} - 2cos(x) = 0,$$

approssimare la radice negativa ξ con il metodo delle bisezioni, con il metodo delle secanti ad estremi variabili ed infine con quello di Newton. Arrestare i tre processi iterativi quando l'errore e_k risulta in modulo minore di $0.5{*}10^{-4}$. Confrontare le velocita' di convergenza ed il costo computazionale dei tre metodi.

4. Data l'*equazione non lineare* dipendente da parametro reale α

$$e^{-x} - \alpha cos(x) = 0,$$

per $\alpha = 2$ approssimare l'unica radice negativa, per $\alpha = -1$ approssimare la radice minore positiva, utilizzando in entrambi i casi il metodo di Newton, e nel I caso anche il metodo delle approssimazioni successive generate dalla funzione di iterazione $\varphi(x) = -log(\alpha cos(x))$. Arrestare entrambi i processi iterativi quando l'errore e_k risulta in modulo minore di $0.5 * 10^{-4}$. Confrontare le velocita' di convergenza dei due metodi per entrambi i valori di α.

2B. Preparare un programma che, a partire dai valori $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ ed $\{f_i\}_{i=0}^{n}$, costruisca $P_n(x)$, *polinomio interpolatore di Lagrange* di grado n.

Utilizzare il programma per costruire il polinomio interpolatore di terzo grado $P_3(x)$ relativo alla funzione dell'esercizio precedente nei nodi $\{-0.4, -0.3, 0.1, 0.15\}$. Stimare l'errore commesso in $x^* = 0$ e $x^* = 0.2$ e confrontarlo con il valore dell'errore effettivo $f(x^*) - P_3(x^*)$.

5. Risolvere un *problema differenziale* del primo ordine (vedi libro L.Gori, M.L. Lo Cascio, F. Pitolli) con il metodo di Eulero ed il metodo di Heun e confrontare i risultati. Studiare il comportamento della soluzione approssimata al diminuire del passo.

6. La crescita di una popolazione puo' essere studiata, in un modello semplificato, attraverso la seguente equazione differenziale detta "equazione logistica":

$$\begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = (a - y(t))y(t) \quad t \in (0, 10) \\ y_0 = 0.1 \end{array}$$

Si utilizzi il metodo di Runge-Kutta del 4 ordine per trovare, per ciascuno dei seguenti valori del parametro a: $a = 1$, $a = 1.4$ e $a = 1.6$, la corrispondente soluzione numerica.