Raccolta di Esercizi d'esame
(di Calcolo Numerico)
Prof. Laura Pezza

Equazioni non lineari

ESERCIZIO 1

Data l' equazione

$$\ln(e+x) = \frac{1}{(1+4x)} + \frac{1}{2}$$

1.1 verificare analiticamente se sono soddisfatte le condizioni per cui esiste un'unica soluzione ξ nell'intervallo $[0,1]$;
1.2 verificare se l'equazione $x = \phi(x)$ con $\phi(x) = \frac{1}{2(2\ln(e+x)-1)} - \frac{1}{4}$ e' localmente equivalente all'equazione data, e se la funzione ϕ e'adatta a generare una successione $x_n = \phi(x_{n-1})$, convergente alla radice $\xi \in [0,1]$; determinare l'ordine di convergenza e l'andamento della successione x_n, specificando quale punto iniziale conviene prendere.

ESERCIZIO 2.

(2.1) Si individui un metodo del secondo ordine per calcolare un valore approssimato di $\sqrt[3]{6}$ e se ne verifichino le condizioni di applicabilita' e di convergenza.
(2.2) Ignorando il valore esatto di $\sqrt[3]{6}$ se ne determini una sua approssimazione a 4 cifre decimali esatte.

ESERCIZIO 3.

Sia data l'equazione dipendente da parametro reale α

$$f(x,\alpha) = \alpha|sin(x)| - x = 0, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

(3.1) Individuare il numero ed il segno delle radici al variare di α;
(3.2) posto $\alpha = 2$, individuare un intervallo di separazione I dell'unica radice positiva ξ; verificare se in I il metodo di Newton e' applicabile e convergente alla radice ξ. Calcolare, con tale metodo, un'approssimazione di ξ con due cifre decimali esatte.

Sistemi lineari

ESERCIZIO 1. Sia dato il seguente sistema lineare dipendente da parametro reale α:

$$\begin{cases} \alpha x + y - 2z = 3 \\ x + y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

(2.1) Determinare i valori (o il valore) di α per cui il condizionamento in norma infinito risulta minimo;
(2.2) per suddetto valore di α si calcoli la soluzione del sistema con il metodo di Gauss con pivoting parziale.

ESERCIZIO 2.

Sia dato il seguente sistema lineare dipendente da parametro reale α:

$$\begin{cases} \alpha x + z = 1 \\ 5y + 3z = 0 \\ x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

(2.1) Determinare i valori di α per cui la matrice del sistema risulta simmetrica e definita positiva;
(2.2) posto $\alpha = 6$, si verifichi la convergenza del metodo di Jacobi e/o del metodo di Gauss Seidel; inoltre, posto $X^{(0)} = [0, 0, 0]^T$, si calcolino due iterate del metodo (eventualmente a scelta) che risulta convergente e, per ciascuna approssimazione, si fornisca una stima numerica del relativo errore di troncamento.

Interpolazione

ESERCIZIO 1.

Siano noti i seguenti valori della funzione $f(x)$:
$f(0) = 1.0000$, $f(0.5) = 0.7702$, $f(1) = 0.2919$,
e sia noto che : $|f'''(x)| \leq 4$, $x \in [0, 1]$.
(1.1) Si costruisca il polinomio interpolatore $p(x)$ di tali dati e se ne fornisca una stima numerica dell'errore di troncamento in $[0, 1]$;
(1.2) si voglia approssimare $\int_0^1 f(x)dx$ con $\int_0^1 p(x)dx$; qual e' il grado di precisione della formula di quadratura cosi' ottenuta?

Integrazione

ESERCIZIO 1.

Si vuole calcolare un valore approssimato di $F(0.5)$, dove $F(x)$ e' la funzione cosi' definita:

$$F(x) = \int_0^x g(t)dt,$$

avendo a disposizione i valore di $g(t)$ in $t = 1$ ed in $t = 0$, e cioe' $g(1) = 0.6504$, $g(0) = 0$.
Si proceda nel seguente modo.
(1.1) si calcoli un'approssimazione F_1 di $F(1)$; con il valore F_1 appena ottenuto, si costruisca il polinomio interpolatore in $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$, $p(x)$, e lo si valuti in $x^* = 0.5$;
(1.2) supponendo esatto il dato $g(1)$ e sapendo che $|g^{(k}(x)| \leq 2, \quad k = 1, 2,$ si fornisca una stima dell'errore totale con cui $p(0.5)$ approssima $F(0.5)$.

ESERCIZIO 2.

Utilizzando opportunamente i valori della seguente tavola della funzione $f(x)$

x_i	0.	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875	1
f_i	0	0.0018	0.0139	0.0448	0.1014	0.1897	0.3148	0.4813	0.6931

si approssimi l'integrale

$$\int_0^1 f(x)dx$$

(2.1) con una formula delle parabole per cui l'errore di troncamento risulti, in modulo, minore di $0.5 * 10^{-4}$;
(2.2) tenendo conto dell'errore sui dati, si stimi l'errore totale (errore di troncamento + errore di propagazione), relativo alla formula di quadratura ottenuta al punto (1.1).

Equazioni differenziali

ESERCIZIO 1.

Sia dato il seguente Problema di Cauchy:

$$\left\{ \; y'(x) = y \, sin(x) \quad y(0) = 1. \right.$$

(2.1) Si eseguano due iterazioni del metodo di Eulero-Cauchy con passo $h = 0.1$ e con i valori ottenuti si determini il polinomio interpolatore $p_2(x)$ in $x_0 = 0$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 0.2$.
(2.2) Sapendo che $|y(x)| \leq 2$, $x \in [0, 0.2]$, e posto $x* = 0.15$, si calcolino e si confrontino tra loro, l'errore di troncamento relativo a $p_2(x*)$ e l'errore di troncamento relativo all'approssimazione ottenuta in $x*$ con tre iterate del

metodo di Eulero-Cauchy e passo $h = 0.05$.

ESERCIZIO 2.

Sia dato il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = 2xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(2.1) Si calcolino due approssimazioni di $y(0.2)$, ottenute, una con il metodo di Eulero-Cauchy e passo $h = 0.2$, l'altra con con il metodo di Eulero-Cauchy e passo $h = 0.1$;
(2.2) si calcoli una terza approssimazione di $y(0.2)$, ottenuta con il metodo di Heun e passo $h = 0.2$; sapendo che la soluzione esatta e' $y(x) = \frac{1}{1-x^2}$, si confronti il valore esatto $y(0.2)$ con i tre valori approssimati precedentemente ottenuti.

ESERCIZIO 3.

Sia dato il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = 4xy, \quad x \in (0, 1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(3.1) Si calcoli, con passo $h = 0.1$ ed utilizzando il metodo di Eulero-Cauchy, un'approssimazione y_1 di $y(0.1)$ ed un'approssimazione y_2 di $y(0.2)$;
(3.2) si valuti, in $x^* = 0.15$, il valore della retta di regressione, $s(x)$, costruita sui nodi (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), e lo si ponga a confronto con il valore che si ottiene, nel medesimo punto x^*, dal metodo di Eulero-Cauchy con passo $h = 0.05$.

Temi

Tema 1.

Si consideri il problema della ricerca delle radici di un' equazione non lineare tramite il metodo delle approssimazioni successive

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad n \geq 1,$$

con x_0 opportuno.
1.1 Descrivere il teorema del punto unito, fornendo anche un'interpretazione grafica.
1.2 Dare la definizione di ordine di convergenza ed illustrare la relazione che lega l'ordine di convergenza alle derivate della funzione di iterazione φ.

Tema 2

Si consideri il problema della ricerca delle radici di un'equazione non lineare.
2.1 Si descriva il metodo del punto unito con particolare riferimento alle condizioni di convergenza;
2.2 Se ne descriva un caso particolare: il metodo di Newton-Raphson.

Tema 3.

Si consideri il problema di risolvere un sistema lineare attraverso un metodo iterativo.
3.1 si derivino e si descrivano, in generale, le ipotesi che garantiscono la convergenza del metodo suddetto;
3.2 si illustri il metodo di Gauss-Seidel e/o del rilassamento.

Tema 4

Si vuole costruire il polinomio p_n di grado n interpolante i dati $\{x_i, g_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$.
4.1 Dimostrare l'esistenza ed unicita' del polinomio p_n verificante le condizioni di interpolazione $p_n(x_i) = g_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$;
4.2 scrivere l'espressione di p_n attraverso le differenze finite e dedurne una stima per l'errore di troncamento.
Motivare e commentare le risposte.

Tema 5.

Si introduca il problema dell'approssimazione dell' integrale definito di una funzione continua $f(x)$ in un insieme chiuso e limitato $[a, b]$: $I = \int_a^b f(x)dx$;
(5.1) si deduca una generica formula di quadratura interpolatoria ed i relativi errori di troncamento e di propagazione;
(5.2) si illustrino le formule di quadratura di Newton -Cotes semplici a due ed a tre nodi.

Tema 6.

Si introduca il problema dell'approssimazione dell' integrale definito di una funzione continua $f(x)$ in un insieme chiuso e limitato $[a, b]$: $I = \int_a^b f(x)dx$;
6.1 si deduca una generica formula di quadratura interpolatoria ed i relativi errori di troncamento e di propagazione;
6.2 si derivino e si descrivano le formule di quadratura di Newton -Cotes generalizzate dei trapezi. **Tema 7.**
Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

7.1 ricavare e discutere le equazioni del metodo di Heun;
7.2 discutere la convergenza del metodo suddetto.

Tema 8.

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

8.1 ricavare e discutere le equazioni del metodo di Eulero-Cauchy;
8.2 discutere la convergenza del metodo suddetto.

Tema 9.
Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

9.1 ricavare e discutere le equazioni del metodo di Eulero modificato;
9.2 fornire qualche esempio di implementazione di tale metodo.

Tema 10
Si consideri l'equazione del trasporto con condizione iniziale e condizione al contorno

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & x > 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0, \\ u(0, t) = \psi(t), & t \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

10.1 Si introducano una discretizzazione del dominio e le formule di derivazione numerica alle differenze opportune per u_t e u_x in modo tale da ottenere lo schema esplicito upwind ;
10.2 si ricavino e si discutano le condizioni di convergenza e di stabilita' del metodo.