CALCOLO NUMERICO
Prof. L. Gori
Prova d'esame 2-7-1998

ESERCIZIO 1.
Data la seguente formula di quadratura:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) + Af(\bar{x}) + R$$

(1.1) Determinare A e $\bar{x}$ in modo che il grado di precisione sia 1.

(1.2) Verificare se, per la formula così ottenuta, il grado di precisione può essere maggiore di 1.

(1.3) Calcolare $I = \int_0^1 \sin^3 x dx$ con la formula di quadratura trovata al punto (1.1) e con la formula di Cavalieri-Simpson e confrontare i risultati ottenuti con il valore esatto di I.

Tutte le risposte vanno motivate.

ESERCIZIO 2.

Date La matrice di iterazione C_{GS} del metodo di Gauss-Seidel di un sistema $AX = B$, con $A = L + D + U$, e la matrice $(D + L)^{-1}$:

$$C_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad (D + L)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

(2.1) calcolare la matrice U;
(2.2) calcolare la matrice A;
(2.3) dimostrare che il metodo di Gauss-Seidel è convergente;

METODI NUMERICI PER L'ING.

C.C.L. AEROSPAZIALE, MECCANICA

Prova scritta del 15-7-1998

ESERCIZIO 1.

Data la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

1.1 determinare i valori di α, per cui la matrice $B(\alpha) = A + \alpha I$ e' invertibile;

1.2 calcolare gli autovalori di A, e determinare la molteplicita' algebrica e geome-trica di ciascun autovalore;

1.3 posto $\alpha = 1$, fattorizzare in modo LU la matrice principale di testa di $B(\alpha)$ del terzo ordine.

ESERCIZIO 2

Dato il seguente problema di Cauchy:

$$y'(x) = -y^2 x$$

$$y(1) = 2,$$

2.1 approssimare $y(1.1)$ utilizzando il metodo di Eulero, prima con passo $h = 0.1$ e successivamente con passo $h = 0.05$;

2.2 sapendo che la soluzione esatta e' $y(x) = \frac{2}{x^2}$, stimare gli errori globali, e_i, relativi a $y(1.1)$ per entrambi i passi, e confrontarli fra loro;

2.3 dopo aver trovato la costante L di Lipschitz di $f(x, y)$, nel dominio $D = [1, 2] \times [1.5, 2.5]$, specificare per quali valori di p vale la seguente formula:

$$|e_i| \leq 4h^p \frac{e^{L(x_i - x_0)} - 1}{L} =: M_i(h),$$

calcolare $M_i(h)$ per i valori di h dati, e verificare se gli errori globali trovati al punto (2.2) hanno lo stesso tipo di andamento di $M_i(h)$.

CALCOLO NUMERICO

PROF. L. GORI

Prova scritta del 15-7-1998

ESERCIZIO 1.

Data la matrice :

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix},$$

$$\alpha \in R$$

1.1 determinare gli autovalori di $A(\alpha)$;

1.2 sapendo che gli autovalori di $A(\alpha)$, sono espressi da: $\lambda_j = \alpha - 2\cos(j\theta)$, $j = 1, 2, 3$, θ opportuno, determinare il valore di θ relativo ad $A(\alpha)$;

1.3 trovare i valori di α per cui $A(\alpha)$ risulta definita positiva.

COGNOME E NOME

ESERCIZIO 1
Data l' equazione

$$\ln(e+x) = \frac{1}{(1+4x)} + \frac{1}{2}$$

1.1 verificare analiticamente se sono soddisfatte le condizioni per cui esiste un'unica soluzione ξ nell'intervallo $[0,1]$;
1.2 verificare se l'equazione $x = \phi(x)$ con $\phi(x) = \frac{1}{2(2\ln(e+x)-1)} - \frac{1}{4}$ e' localmente equivalente all'equazione data, e se la funzione ϕ e'adatta a generare una successione $x_n = \phi(x_{n-1})$, convergente alla radice $\xi \in [0,1]$;
1.3 determinare l'ordine di convergenza e l'andamento della successione x_n, specificando quale punto iniziale conviene prendere.

ESERCIZIO 2
Data la funzione peso $p(x) = x^2$ nell'intervallo $[-1,1]$,
2.1 determinare il polinomio di 2^0 grado $P_2(x) = x^2 + ax + b$ ortogonale in $[-1,1]$ rispetto a $p(x)$ e trovarne gli zeri: x_1, x_2;
2.2 determinare i coefficienti della corrispondente formula gaussiana:

$$\int_{-1}^{1} p(x)f(x)dx = H_1 f(x_1) + H_2 f(x_2) + R;$$

2.3 senza sviluppare i calcoli, e' possibile affermare che la valutazione dell'integrale

$$I = \int_{-1}^{1} (x^5 + x^4)dx.$$

mediante la formula di quadratura determinata al punto precedente, fornisce il valore esatto? Motivare la risposta.

METODI NUMERICI PER L'ING.
PROF. M. M. CERIMELE
Prova scritta del 21-9-1999

Sia data la funzione $f(x) = |sinx|$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, e siano dati i nodi $x_0 = -\pi/2$, $x_1 = -\pi/6$, $x_2 = \pi/3$, $x_3 = 2/3\pi$.

1.1 Valutare l'errore di troncamento che si commette approssimando, nel punto $\hat{x} = 4/5\pi$, la funzione $f(x)$ per mezzo del polinomio interpolatore nei nodi x_0,...,x_2;

1.2 stabilire su quale cifra decimale devono essere arrotondati i dati se si vuole ottenere, sempre in $\hat{x} = 4/5\pi$, un errore di propagazione $|E_*| \leq 0.5$ 10^{-4}; commentare il risultato.

MOTIVARE LE RISPOSTE.

ESERCIZIO 2

L' equazione differenziale del 2^0 ordine

$$y'' + 2cy' + k^2 y = 0 \quad c \neq 0, k > 0, \geq 1$$

puo' essere trasformata nel seguente sistema di due equazioni differenziali del 1^0 ordine

$$y'(x) = v(x)$$

$$v'(x) = -2cv(x) - k^2 y(x) \geq 2$$

2.1 Scrivere esplicitamente il metodo di Eulero per la soluzione del sistema (2);

2.2 posto $c = 2$, $k = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, eseguire due passi del metodo di Eulero con $h = 0.01$.

METODI NUMERICI PER L'ING.

PROF. L. Gori

Prova scritta del 22-10-1999

ESERCIZIO 1.

La famiglia di equazioni, dipendenti da $\alpha \in R$

$$f(x;\alpha) = senx + \alpha sen2x + (2\alpha + 1)(1 - e^x),$$

$x \in R$, ammette $\xi = 0$ come soluzione.

1.1 individuarne la molteplicita' per $\alpha = -1/2$, e per $\alpha = 1/2$;

1.2con quale metodo a convergenza quadratica, si puo' approssimare $\xi = 0$, nei due casi?

1.3 eseguire alcune iterate per il caso $\alpha = 1/2$.

METODI NUMERICI PER L'INGEGNERIA

Prof. M.M. Cerimele

Prova scritta del 14-01-2000

ESERCIZIO 1.

Si consideri la seguente formula di quadratura

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq Af\left(\frac{1}{3}\right) + Bf\left(\frac{2}{3}\right) + Cf\left(\frac{4}{3}\right).$$

1.1 Determinare i coefficienti in modo che il grado di precisione sia almeno 2 e verificare se 2 è anche il massimo grado di precisione della formula ottenuta.

1.2 Qual è il segno dell'errore di troncamento che si ha valutando

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

con la formula così ottenuta? Si trascuri l'errore propagazione.

ESERCIZIO 2

Si consideri il problema della ricerca del punto unito ξ della trasformazione

$$x = \varphi(x; \alpha) = \sqrt{\alpha \sin x}, \quad x \in I = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right], \quad \alpha > 0.$$

2.1 Verificare per quali valori di α risulta $|\varphi'(x; \alpha)| \leq 0.75$. Quali ulteriori condizioni su α assicurano l'esistenza e unicità di un unico punto unito del problema assegnato e con quale punto iniziale?

2.2 Per i valori di α trovati al punto precedente, individuare l'ordine di convergenza della successione $x_{n+1} = \varphi(x_n; \alpha)$ che approssima ξ.

2.3 Esiste qualche valore di α per cui l'ordine del metodo è almeno 2.

METODI NUMERICI PER L'ING.

PROF. M. M. Cerimele

Prova scritta del 28-1-2000

ESERCIZIO 1.

Di una funzione sono assegnati i valori $f_0 = f(x_0)$, $g_1 = f'(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$, e si vuole determinare un polinomio di secondo grado p_2, tale che risulti

$$p_2(x_0) = f_0, \quad p_2'(x_1) = g_1, \quad p_2(x_2) = f_2,$$

con $x_0 \neq x_2$.

(1.1) Trovare le condizioni su x_0, x_1, x_2 affinche' il problema ammetta soluzione unica.

(1.2) Con i seguenti dati $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $f_0 = 0$, $f_2 = 1$, come va scelto g_1 affinche' il problema ammetta soluzione?

(1.3) Con le ipotesi del punto 2., quante soluzioni ammette il problema? Se ne esiste piu' di una determinare almeno due diversi polinomi p_2 e tracciarne i grafici.

ESERCIZIO 2.

Sia A la seguente matrice

$$A = I_n - VE_k^T,$$

dove I_n e' la matrice identita' di ordine n, $k \in \{1, ..., n\}$ un intero assegnato, E_k e' il k-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$, e $V = [v_1, v_2, ..., v_n]^T$ e' il k-simo vettore tale che risulti $E_i^T V = 0$, $i = 1, 2, ..., k$.

(2.1) Individuare la struttura di V e scrivere esplicitamente la matrice A;

(2.2) verificare che la matrice $B = I_n + VE_k^T$ e' la matrice inversa di A;

(2.3) dato un vettore $X = [x_1, ..., x_k, 0, 0, ..., 0]^T$, $x_i \neq 0$, $i = 1, ..., k$, determinare il vettore V in modo tale che risulti

$$AX = X.$$

METODI NUMERICI PER L'ING.

Prof. M. Montrone

Prova scritta del ..-..-....

ESERCIZIO 1.

Data la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

1.1 determinare i valori di α, per cui la matrice $B(\alpha) = A + \alpha I$ e' invertibile;

1.2 calcolare gli autovalori di A, e determinare la molteplicita' algebrica e geome-trica di ciascun autovalore;

1.3 posto $\alpha = 1$, fattorizzare in modo LU la matrice principale di testa di $B(\alpha)$ del terzo ordine.

ESERCIZIO 2.

Data la matrice:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & \beta \\ \alpha & 5 & \beta \\ 2 & 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

2.1 Determinare $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ in modo che la matrice sia dominante per righe;

2.2 Per $\alpha = 4$ e $\beta = 0.5$, se e' possibile, applicare due iterazioni del metodo di Jacobi al sistema $AX = B$ con $B = (1, 0, 1)^T$;

2.3 Nel caso 2), valutare quante iterazioni sono necessarie con il metodo di Jacobi per ottenere un errore, in norma infinito, minore di 10^{-3}.

ESERCIZIO 3. EQUAZIONI NON LINEARI

Data l' equazione

$$\ln(e + x) = \frac{1}{(1 + 4x)} + \frac{1}{2}$$

3.1 verificare analiticamente se sono soddisfatte le condizioni per cui esiste un'unica soluzione ξ nell'intervallo $[0, 1]$;

3.2 verificare se l'equazione $x = \phi(x)$ con $\phi(x) = \frac{1}{2(2\ln(e+x)-1)} - \frac{1}{4}$ e' localmente equivalente all'equazione data, e se la funzione ϕ e'adatta a generare una successione $x_n = \phi(x_{n-1})$, convergente alla radice $\xi \in [0, 1]$;

3.3 determinare l'ordine di convergenza e l'andamento della successione x_n, specificando quale punto iniziale conviene prendere.

ESERCIZIO 3.

Sia data la funzione $f(x) = |sinx|$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, e siano dati i nodi $x_0 = -\pi/2$, $x_1 = -\pi/6$, $x_2 = \pi/3$, $x_3 = 2/3\pi$.

3.1 Valutare l'errore di troncamento che si commette approssimando, nel punto $\hat{x} = 4/5\pi$, la funzione $f(x)$ per mezzo del polinomio interpolatore nei nodi x_0,...,x_2;

3.2 stabilire su quale cifra decimale devono essere arrotondati i dati se si vuole ottenere, sempre in $\hat{x} = 4/5\pi$, un errore di propagazione $|E_*| \leq 0.5$ 10^{-4}; commentare il risultato.

MOTIVARE LE RISPOSTE.

ESERCIZIO 4. Siano assegnati i seguenti valori: $ln0.5 = -0.6931$, $ln1.5 = 0.4055$, $ln2.5 = 0.9163$, e la funzione:

$$f(t) = \int_1^t x \ln x dx.$$

4.1 Con la formula del trapezio calcolare i valori approssimati di $f(0.5)$, $f(1.5)$, $f(2.5)$;

4.2 Usare tali valori per ricavare un valore approssimato di $f(2)$;

4.3 Dare una stima dell'errore totale con cui tale valore approssima $f(2)$, supponendo esatti i valori assegnati di $ln0.5$, $ln1.5$, $ln2.5$.

ESERCIZIO 5.

Dato il seguente problema di Cauchy:

$$y'(x) = -y^2 x$$

$$y(1) = 2,$$

5.1 approssimare $y(1.1)$ utilizzando il metodo di Eulero, prima con passo $h = 0.1$ e successivamente con passo $h = 0.05$;

5.2 sapendo che la soluzione esatta e' $y(x) = \frac{2}{x^2}$, stimare gli errori globali, e_i, relativi a $y(1.1)$ per entrambi i passi, e confrontarli fra loro;

5.3 dopo aver trovato la costante L di Lipschitz di $f(x, y)$, nel dominio $D = [1, 2] \times [1.5, 2.5]$, specificare per quali valori di p vale la seguente formula:

$$|e_i| \leq 4h^p \frac{e^{L(x_i - x_0)} - 1}{L} =: M_i(h),$$

calcolare $M_i(h)$ per i valori di h dati, e verificare se gli errori globali trovati al punto (2.2) hanno lo stesso tipo di andamento di $M_i(h)$.

ESERCIZIO 6. L' equazione differenziale del 2^0 ordine

$$y'' + 2cy' + k^2y = 0 \quad c \neq 0, k > 0,$$

puo' essere trasformata nel seguente sistema di due equazioni differenziali del 1^0 ordine

$$y'(x) = v(x)$$
$$v'(x) = -2cv(x) - k^2y(x)$$

6.1 Scrivere esplicitamente il metodo di Eulero per la soluzione del sistema (2);

6.2 posto $c = 2$, $k = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, eseguire due passi del metodo di Eulero con $h = 0.01$.

MOTIVARE LE RISPOSTE.