

ANALISI NUMERICA

Prof. Laura Pezza

Prova scritta del 19-7-2004

COGNOME E NOME

ESERCIZIO 1.

Sia dato il seguente sistema lineare dipendente da parametri reali α e β :

$$\begin{cases} \alpha x + 2z = \beta \\ 4y + 3z = 0 \\ x + 3y + 8z = 1 \end{cases}$$

(1.1) Determinare un insieme di valori di α per cui il metodo di Jacobi ed il metodo di Gauss Seidel siano entrambi convergenti;

(1.2) posto $\alpha = 4$, e $X^{(0)} = [0, 0, 0]^T$, si determini il valore di β per cui risulta massimo, con il metodo di Jacobi, il numero di iterate necessarie per ottenere un'accuratezza alla quarta cifra decimale.

ESERCIZIO 2

Siano noti i seguenti valori di una funzione $f(x)$:
 $f(0) = 1.0000$, $f(0.5) = 0.7788$, $f(1) = 0.3679$,
e sia noto che: $|f'''(x)| \leq 1$, $x \in [0, 1]$.

(2.1) Si costruisca il polinomio interpolatore $p(x)$ di tali dati e se ne fornisca una stima numerica dell'errore di troncamento in $[0, 1]$;

(2.2) si approssimi $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con $\int_0^1 p(x) dx$ e si fornisca una stima numerica dell'errore globale commesso.

Motivare e commentare le risposte.

Svolgere **solo uno** (a scelta) dei seguenti temi.

Tema 1.

Si consideri il problema della ricerca delle radici di un' equazione non lineare tramite il metodo delle approssimazioni successive

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad n \geq 1,$$

con x_0 opportuno.

1.1 Descrivere il teorema del punto unito, fornendo anche un'interpretazione grafica.

1.2 Dare la definizione di ordine di convergenza ed illustrare la relazione che lega l'ordine di convergenza alle derivate della funzione di iterazione $\varphi(x)$.

Tema 2.

Si introduca il problema dell'approssimazione dell' integrale definito di una funzione continua $f(x)$ in un insieme chiuso e limitato $[a, b]$: $I = \int_a^b f(x)dx$;

(2.1) si deduca una generica formula di quadratura interpolatoria ed i relativi errori di troncamento e di propagazione;

(2.2) si illustrino le formule di quadratura di Newton -Cotes semplici a due ed a tre nodi.

Tema 3.

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

3.1 ricavare e discutere le equazioni del metodo di Heun;

3.2 discutere la convergenza del metodo suddetto.

Motivare e commentare le risposte.