ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 21.06.2023

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

Durante i primi 90 minuti è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo.

(1) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ il solido ottenuto ruotando l'insieme $\{(0,y,z):\ z \in [\frac{1}{2},1],\ 0 \le y \le \frac{2}{z}\}$ di un angolo giro intorno all'asse z. Sia Σ^+ la sua "superficie laterale", ovvero $\Sigma = \partial\Omega \cap \{z \in (\frac{1}{2},1)\}$, orientata secondo la normale esterna a Ω.

(a) Calcolare il baricentro di Ω;

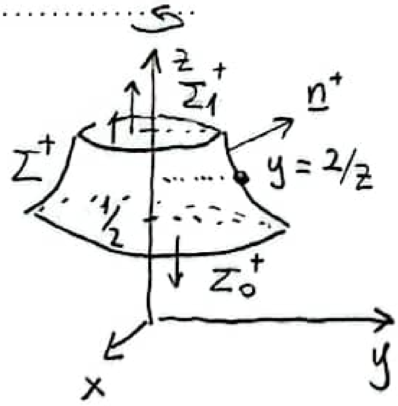
(b) calcolare il flusso di $\mathbf{V} = (x, z, -5)$ attraverso Σ^+.

8 punti

Risposta: (a) $(0,0,\log 2)$

(b) -56π

Svolgimento:



(a) Per strati: $\Omega = \{ z \in [1/2, 1], (x,y) \in \Omega_z \}$

$\Omega_z = \{ x^2 + y^2 \le 4/z^2 \}$

$$|\Omega|_3 = \int_{1/2}^{1} \iint_{\Omega_z} 1 \, dx\,dy\,dz = \int_{1/2}^{1} \pi \frac{4}{z^2}\, dz$$

$$= -\frac{4\pi}{z}\Big|_{1/2}^{1} = 4\pi$$

$x_B = y_B = 0$ per simmetria

$$z_B = \frac{1}{4\pi} \int_{1/2}^{1} \iint_{\Omega_z} z \, dx\,dy\,dz = \cancel{\frac{1}{4\pi}} \int_{1/2}^{1} \frac{\cancel{4\pi}}{z}\, dz = \log 2$$

(b) Teorema della divergenza con $\partial\Omega^+ = \Sigma^+ \cup \Sigma_0^+ \cup \Sigma_1^+$

$$\iint_{\Sigma} \underline{V} \cdot \underline{n}^+ dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \underline{V} - \iint_{\Sigma_0} \underline{V} \cdot \underset{(0,0,-1)}{\underline{n}^+} dS - \iint_{\Sigma_1} \underline{V} \cdot \underset{(0,0,1)}{\underline{n}^+} dS$$

$$= |\Omega|_3 - 5|\Sigma_0|_2 + 5|\Sigma_1| = 4\pi - 5 \cdot 16\pi + 5 \cdot 4\pi$$

(2) Per $A \in \mathbb{R}$, si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}_A(x,y) = \left((3-A)y - \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\,,\; -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2} \right).$$

(a) Determinare, se esistono, i valori di A per cui $\mathbf{F}_A$ è conservativo nel suo dominio naturale, e determinarne una funzione potenziale.

(b) Per ogni $A \in \mathbb{R}$, calcolare il lavoro di $\mathbf{F}_A$ lungo $\gamma(t) = (1-t, t)$, $t \in [0,1]$.

$\boxed{\text{8 punti}}$

Risposta: (a) $A = 3$, $U(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

(b) $\frac{A-3}{2}$

Svolgimento:

(a) $U(x,y) = \int -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \frac{1}{x^2+y^2} + C(x)$

$U_x(x,y) = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + C'(x) \overset{?}{=} (3-A)y - \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \iff A = 3$

(b) $\int_\gamma F_A \cdot d\underline{x} = \int_\gamma F_3 \cdot d\underline{x} + \int_\gamma ((3-A)y, 0)\cdot d\underline{x}$

$= U(\gamma(1)) - U(\gamma(0)) - \int_0^1 (3-A)t\,dt$

$= U(0,1) - U(1,0) + \frac{A-3}{2} = \frac{A-3}{2}.$

(3) Per ogni $A \in \mathbb{R}$ risolvere il seguente problema di Cauchy, determinando anche l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} x''(t) = 2x(t)x'(t) \\ x(0) = A,\ x'(0) = A^2. \end{cases}$$

8 punti

Risposta: • $x \equiv 0$, $I = \mathbb{R}$ se $A = 0$

• $x(t) = \frac{A}{1-At}$ se $A \neq 0$, $I = \begin{cases} (-\infty, \frac{1}{A}) & \text{se } A > 0 \\ (\frac{1}{A}, +\infty) & \text{se } A < 0 \end{cases}$

Svolgimento: EDO autonoma.

Se $A = 0$, $x \equiv 0$ è soluzione con $I = \mathbb{R}$. Se $A \neq 0$:

Metodo generico $\quad v(x) = x'(t(x)) \qquad v'(x) = 2x$

$v(A) = A^2 \qquad v(x) = x^2 + C$

$v(A) = A^2 \iff C = 0$

$x'(t) = x^2(t) \qquad \int \frac{x'(t)}{x^2(t)} dt = 1 \iff -\frac{1}{x(t)} = t + C = t - \frac{1}{A} = \frac{At-1}{A}$

$-\frac{1}{A} = C$

$x(t) = \frac{A}{1-At}$

Metodo ad hoc $\quad \int x''(t)\,dt = \int 2x(t)x'(t)\,dt$

$x'(t) = x^2(t) + C \underset{\text{c.I.}}{=} x^2(t)$

poi come sopra.