

Evoluzione di strati liquidi sottili

Lo scopo del corso é fornire una panoramica sull'argomento, toccando sia gli aspetti modellistici sia quelli analitici sia le interazioni tra essi, con particolare attenzione agli sviluppi piú recenti della ricerca e ai problemi aperti.

1. Il modello. In questa sezione descriviamo i principali modelli proposti: in tutti i casi si tratta di problemi a frontiera libera per una classe di equazioni paraboliche del quarto ordine nonlineari e degeneri.

- L'equazione di Navier-Stokes;
- la teoria della lubrificazione;
- applicazioni industriali;
- la condizione di perfetta aderenza, ovvero: un paradosso modellistico;
- Le possibili soluzioni: condizioni di scivolamento, viscositá variabile, forze di van der Waals, una piccola scatola nera.

2. Un corso accelerato di analisi asintotica (e dei suoi limiti). Attraverso metodi euristici, si evidenziano le principali proprietá dell'operatore: velocitá di propagazione del supporto, regolaritá ottimale, fenomeno del tempo d'attesa. Si dá anche un esempio molto istruttivo di fallimento di questi metodi.

- Onde viaggianti e conseguenze: conferma del paradosso, regolaritá ottimale delle soluzioni;
- soluzioni autosimilari e conseguenze: velocitá di propagazione del supporto, (non)unicitá, limiti dell'approccio euristico;
- soluzioni a variabili separabili e conseguenze: il fenomeno del tempo di attesa.

3. Esistenza di soluzioni forti. In questa sezione forniamo le linee principali delle dimostrazioni di esistenza di soluzioni forti dell'equazione degli strati liquidi sottili.

- Qualche richiamo: immersioni di Sobolev e stime di interpolazione di tipo parabolico;
- stime di energia e conseguenze;
- stime di entropia e conseguenze;

- teoria della prassi: il metodo di approssimazione;
- un teorema di compattezza in H^1 ;
- caratterizzazione delle soluzioni forti.

4. Metodi di energia I. In questa sezione introduciamo una tecnica attraverso la quale é possibile provare proprietà qualitative per operatori parabolici degeneri di qualsiasi ordine, anche privi di struttura autosimilare. La tecnica é basata su metodi iterativi e stime di energia/entropia.

- Qualche strumento: disuguaglianze di Gagliardo–Nirenberg, disuguaglianze di Bernis, una estensione del Lemma di Stampacchia;
- un esempio semplice: l'equazione dei mezzi porosi;
- stime di entropia e di energia localizzate;
- velocità di propagazione finita;
- tempo d'attesa.

5. Metodi di energia II. La condizione di scivolamento introduce una ulteriore scala (microscopica) nell'equazione degli strati liquidi sottili, data dal coefficiente di scivolamento $b \ll 1$. É stato congetturato (de Gennes) che questa scala alteri solo logaritmicamente l'evoluzione macroscopica dello strato liquido. In questa sezione ne diamo una dimostrazione rigorosa, basata su metodi di energia e sulla struttura (formale) di flusso–gradiente dell'operatore.

- Un problema a due scale;
- un semplice argomento euristico;
- la nozione di supporto macroscopico;
- il punto chiave: stime di Bernis logaritmiche;
- cenni di dimostrazione.

6. Complementi.

- Il problema di Hele–Shaw: struttura di flusso–gradiente e prima dimostrazione rigorosa della consistenza della teoria della lubrificazione;
- l'equazione di Cahn–Hilliard: analogie e differenze con l'equazione degli strati sottili;
- l'azione di potenziali di tipo Lennard–Jones: biforcazioni e concentrazioni;
- metodi numerici.