

## METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA

Corsi di Laurea a distanza in Ingegneria – Consorzio Nettuno – Polo di Roma

Prova scritta del 8-1-07

1) Sia  $x : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  il segnale definito da

$$x(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } t \in [0, 1) \\ 2 & \text{se } t \in [1, 3) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- (a) calcolare la derivata distribuzionale di  $x$ ;  
(b) calcolare la trasformata di Laplace di  $x$ .

.....

(a)  $x'(t) = -\delta(t) + 3\delta(t-1) - 2\delta(t-3)$ .

(b) Utilizzando il punto (a), si ottiene immediatamente

$$\mathcal{L}[x'](s) = -1 + 3e^{-s} - 2e^{-3s},$$

da cui (poiché  $\mathcal{L}[x'](s) = s\mathcal{L}[x](s)$ )

$$\mathcal{L}[x](s) = \frac{1}{s} \left( -1 + 3e^{-s} - 2e^{-3s} \right).$$

2) Calcolare

$$\int_{\partial D} \frac{1}{z^4 + 2i} dz$$

nei seguenti due casi:

- (a)  $D = D_1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| < \sqrt{2}\}$ ;  
(b)  $D = D_2 = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 2, \text{Im}(z) \leq 0\}$ .

.....

Si ha

$$z^4 + 2i = 0 \iff z^4 = -2e^{-i\pi/2} \iff z = \begin{cases} z_1 = 2^{1/4}e^{-i\pi/8} \in D_1 \cap D_2 \\ z_2 = 2^{1/4}e^{3i\pi/8} \in D_1 \setminus D_2 \\ z_3 = 2^{1/4}e^{7i\pi/8} \in D_1 \setminus D_2 \\ z_4 = 2^{1/4}e^{11i\pi/8} \in D_1 \cap D_2 \end{cases}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} R(z_1) &= \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=z_1} = 2^{-11/4}e^{3i\pi/8}, \\ R(z_2) &= \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=z_2} = 2^{-11/4}e^{-9i\pi/8}, \\ R(z_3) &= \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=z_3} = 2^{-11/4}e^{-5i\pi/8}, \\ R(z_4) &= \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=z_4} = 2^{-11/4}e^{-i\pi/8}, \end{aligned}$$

quindi

$$\int_{\partial D_1} \frac{1}{z^4 + 2i} dz = 2^{-7/4} \pi i \left( e^{-3i\pi/8} + e^{9i\pi/8} + e^{5i\pi/8} + e^{i\pi/8} \right) = 0,$$

$$\int_{\partial D_2} \frac{1}{z^4 + 2i} dz = 2^{-7/4} \pi i \left( e^{-3i\pi/8} + e^{i\pi/8} \right).$$