ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE (L-Z) — PROVA SCRITTA — 10.01.13

Cognome: .... **Nome:** ....

Solo durante le prime 2 ore e 15 minuti è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Verificare che, in un intorno del punto $(x, y) = (1, \pi)$, l'equazione

$$\sin(xy) - x = -1$$

individua implicitamente una funzione $y = g(x)$ oppure $x = h(y)$. Determinare lo sviluppo di Taylor del secondo ordine (con centro in $x_0 = 1$ oppure in $y_0 = \pi$, rispettivamente) della funzione cosí ottenuta.

.... 7 punti

Risposta:

$g(x) = \pi - (1 + \pi)(x - 1) + (1 + \pi)(x - 1)^2$.

....

Svolgimento:

Lo svolgimento mediante il Teorema di Dini è standard e si rimanda allo svolgimento degli appelli precedenti. Si osservi che, in alternativa, l'equazione può essere risolta esplicitamente rispetto a x in un intorno di $(1, \pi)$, osservando che $\sin(xy) = -\sin(xy - \pi)$: si ottiene

$$y = g(x) = \frac{\pi + \arcsin(1 - x)}{x}.$$

(2) Data la curva

$$\gamma : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \cos(2t)),$$

calcolare

$$\int_\gamma x \, \mathrm{d}s.$$

.... 7 punti

Risposta:

$(17^{3/2} - 1)/24$.

....

Svolgimento:

Cenno: applicando la definizione di integrale curvilineo di prima specie e ossefvando che l'integranda è pari, si ottiene

$$\int_\gamma x \, \mathrm{d}s = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t |\sin t| (1 + 16\cos^2 t)^{1/2} \mathrm{d}t = 2 \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t (1 + 16 \cos^2 t)^{1/2} \mathrm{d}t$$

che si integra con la sostituzione $y = \cos^2 t$.

(3) Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando il triangolo (definito sul piano $z = 0$) di vertici $(1, 1, 0)$, $(2, 4, 0)$, $(1, 4, 0)$ di un angolo 2π attorno all'asse y.

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

4π.

. . . .

Svolgimento:

Cenno: si tratta del volume di un solido di rotazione (un tronco di cono meno un cilindro), che quindi vale

$$\int_1^4 \pi \left(\left(\frac{y+2}{3} \right)^2 - 1 \right) \mathrm{d}y = 4\pi.$$

(4) Dopo aver determinato lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = |\sin x|$, calcolare la somma della seguente serie numerica:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}.$$

.... 7 punti

Risposta:

1/2

....

Svolgimento:
La funzione é pari e periodica di periodo π. Si ha quindi $b_n = 0$ per ogni n e

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos(2nx) \mathrm{d}x.$$

Quindi

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}$$

e, integrando per parti,

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos(2nx) \mathrm{d}x &= \underbrace{\frac{2}{n\pi} [\sin x \sin(2nx)]_0^{\pi/2}}_{=0} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x \sin(2nx) \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{n^2\pi} \cos x \cos(2nx) \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{n^2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos(2nx) \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

ovvero

$$\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos(2nx) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n^2\pi} \cos x \cos(2nx) \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{n^2\pi},$$

quindi

$$a_n = -\frac{4}{(4n^2 - 1)\pi}.$$

Si conclude che la serie di Fourier è

$$\frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n^2 - 1)\pi} \cos(2nx).$$

Valutando la serie in $x = 0$ e tenendo conto che $f(0) = 0$, si ottiene

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

(5) Rispondere alle due domande che saranno distribuite durante il compito.

(A.1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Determinare la direzione di massima pendenza del grafico di f in (x_0, y_0).

(A.2) Determinare (purché esistano) le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''''(x) - 2y'''(x) + y''(x) = 0$$

che posseggono un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

.... $\boxed{\text{8 punti}}$

Risposte: