ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE (L-Z) — PROVA SCRITTA — 18.06.13

Cognome: .... **Nome:** ....

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2.$$

Determinare il massimo assoluto ed il minimo assoluto di f su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 4y^2 + 2x \leq 0,\ x \geq -\frac{3}{2}\right\}.$$

.... 7 punti

Risposta:

$$\min_{\Omega} f = 0, \quad \max_{\Omega} f = 19/16.$$

....

Cenno di svolgimento:
La funzione ha un punto critico interno $(-1/2, 0)$. Su $\partial\Omega$ si ottengono i punti critici vincolati $(0,0)$, $(-1/3, \pm\sqrt{5}/6)$ e $(-3/2, 0)$. Inoltre si devono considerare a parte i "vertici" $(-3/2, \pm\sqrt{3}/4)$. Confrontando i valori si ottiene la risposta.

(2) Sia ω la forma differenziale definita da

$$\omega(x,y) = \left(\frac{y}{1+x^2y^2} - 2x\right)\mathrm{d}x + \frac{x}{1+x^2y^2}\mathrm{d}y, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

e sia $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\gamma(t) = \left(t^4\cos\left(\pi(t-1)\right), |t|\right), \quad t\in[-1,1]$$

orientata nel verso delle t crescenti. Calcolare

$$\int_{\gamma^+}\omega.$$

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$$0.$$

....

Cenno di svolgimento:
La curva è chiusa e la forma è esatta, con funzioni potenziali

$$U(x,y) = \arctan(xy) - x^2 + C, \quad C\in\mathbb{R}.$$

(3) Sia Σ^+ la superficie ottenuta ruotando il sostegno della curva

$$\gamma(t) = (0, e^t, t), \quad t \in [0, 1]$$

di un angolo 2π attorno all'asse z, orientata in modo tale che $\mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{e}_3 \geq 0$. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{V}(x, y, z) = (x, y, 0)$ attraverso Σ^+.

. . . . 7 punti

Risposta:

$$-\pi(e^2 - 1).$$

. . . .

Cenno di svolgimento:
La parametrizzazione è

$$\sigma(\varphi, t) = (e^t \cos\varphi, e^t \sin\varphi, t)$$

e la normale da scegliere è $\mathbf{n}^+ = -\sigma_\varphi \wedge \sigma_t$. Il resto è un calcolo.

(4) Risolvere il seguente problema di Cauchy, specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y''(x) = 2\,(y(x)+1)\,y'(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}.$$

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$$y(x) = \frac{x}{1-x} \qquad I = (-\infty, 1)$$

. . . .

Cenno di svolgimento:
Attraverso il metodo risolutivo per equazioni autonome del secondo ordine oppure, più semplicemente, osservando che si possono integrare una volta entrambi i membri dell'equazione.

(5) Rispondere alle due domande che saranno distribuite durante il compito.
. . . . $\boxed{\text{8 punti}}$

Risposte: