~~A~~

ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 25.01.2018

Cognome: VERSIONE .... Nome: PRELIMINARE ....

Solo durante le prime due ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente e completamente almeno due esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere alle domande che saranno consegnate dopo due ore.

(1) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme definito da

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < \frac{1}{x} \le y \le 4 + \frac{1}{x-4}\right\} \cap \{x \le 4\}$$

(a) Calcolare l'area di Ω;

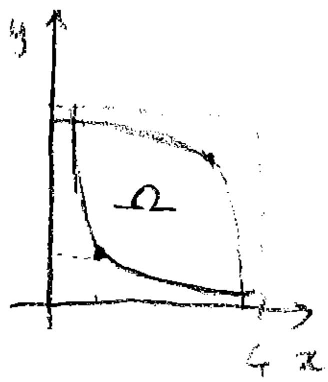
(b) calcolare il baricentro di Ω.

punti: 6

Risposta: (a) $|\Omega| = 8\sqrt{3} + 2\log\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)$

(b) $(x_B, y_B) = (2, 2)$.

Svolgimento:



(a) Si ha $\frac{1}{x} = 4 + \frac{1}{x-4}$

$$\Leftrightarrow \frac{4x(x-4) + \cancel{x} - \cancel{x} + 4}{x(x-4)} = \frac{4(x^2-4x+1)}{x(x-4)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$ Quindi

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{1}{x} \le y \le 4 + \frac{1}{x-4},\ \ 2-\sqrt{3} \le x \le 2+\sqrt{3}\right\}$$

$$|\Omega| = \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \int_{1/x}^{4+\frac{1}{x-4}} dy\,dx = \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{x} + 4 + \frac{1}{x-4}\right) dx$$

$$= \Big[4x + \log\underbrace{|x-4|}_{=4-x} - \log|x|\Big]_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} = 8\sqrt{3} + \log(2-\sqrt{3}) - \log(2+\sqrt{3}) - \log(2+\sqrt{3}) + \log(2-\sqrt{3})$$

$$= 8\sqrt{3} + 2\log\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)$$

(b) Si può svolgere il calcolo diretto (simile al precedente) oppure osservare che:

(i) Ω è simmetrico rispetto a $y = x$, in quanto

$$\frac{1}{x} \leq y \iff \frac{1}{y} \leq x$$

$$y \leq 4 + \frac{1}{x-4} \iff y - 4 \leq \frac{1}{x-4} \iff x - 4 \leq \frac{1}{y-4}$$

$$\iff x \leq 4 + \frac{1}{y-4}$$

(ii) Ω è simmetrico rispetto a $y = 4 - x$, in quanto $(x = 4 - y)$

$$\frac{1}{x} \leq y \iff \frac{1}{4-y} \leq 4 - x \iff x \leq 4 + \frac{1}{y-4}$$

$$y \leq 4 + \frac{1}{x-4} \iff 4 - x \leq 4 - \frac{1}{y} \iff \frac{1}{y} \leq x$$

Pertanto il baricentro si trova sull'intersezione delle due rette $y = x$ e $y = 4 - x$, ovvero in $(2, 2)$.

(2) Siano Σ_1 e Σ_2 le superfici definite da

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2=1, \; z \in [0,1]\}, \\ \Sigma_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2=1, \; z \le 0\} \end{aligned}$$

e sia $\mathbf{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{V}(x,y,z) = (x - 3y^2, y + 2x^2, z).$$

(a) Disegnare $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ e calcolarne l'area;

(b) calcolare

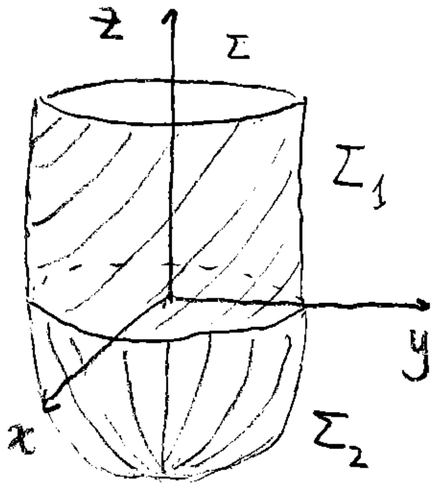
$$\iint_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

punti: 6

Risposta: (a) $|\Sigma_1 \cup \Sigma_2| = 4\pi$

(b) 4π.

Svolgimento:



a) Σ_1 superficie laterale cilindrica
Σ_2 semisfera.

$$|\Sigma_1 \cup \Sigma_2| = \underbrace{2\pi \cdot 1 \cdot 1}_{|\Sigma_1|} + \underbrace{(4\pi \cdot 1^2)/2}_{|\Sigma_2|}$$

$$= 4\pi$$

b) Si può effettuare un calcolo diretto, oppure osservare che, posto

$$\Omega = \{ x^2+y^2 \le 1, \; 1-x^2-y^2 \le z \le 1 \}$$

si ha $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \setminus \Sigma$, dove Σ è il "tappo" superiore:

$$\Sigma = \{ x^2+y^2 \le 1, \; z = 1 \}$$

Pertanto, utilizzando il teorema della divergenza,

$$\iint_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \underline{V} \cdot \underline{n}\, dS = \iint_{\partial\Omega} \underline{V} \cdot \underline{n}\, dS - \iint_{\Sigma} \underline{V} \cdot \underline{n}\, dS$$

$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \underline{V} - \iint_{\Sigma} \underline{V}\big|_{z=1} \cdot (0,0,1)\, dS$$

$$= \iiint_{\Omega} 3 - \iint_{\Sigma} 1\, dS = 3 \operatorname{volume}(\Omega) - \operatorname{area}(\Sigma)$$

$$= 3\left(\pi \cdot 1^2 \cdot 1 + \frac{2}{3}\pi \cdot 1^3\right) - \pi \cdot 1^2 = 4\pi$$

(3) Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{y}{x+y-4}.$$

(a) Determinare il dominio naturale D di f e disegnarlo;

(b) determinare gli eventuali punti critici di f e stabilirne la natura;

(c) determinare il massimo e il minimo assoluto di f nell'insieme

$$K = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

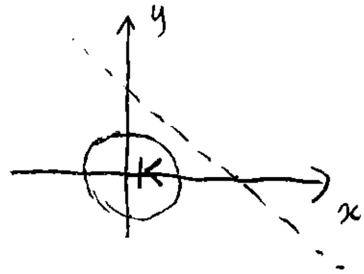
punti: 6

Risposta: (a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x+y-4 \neq 0\}$

(b) nessuno.

(c) $\max_K f = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$, $\min_K f = \frac{1}{1-\sqrt{3}}$.

Svolgimento:



(a) $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x+y-4 \neq 0 \}$

(b)
$$\begin{cases} f_x = -y(x+y-4)^{-2} \overset{!}{=} 0 \\ f_y = (x+y-4)^{-1} - y(x+y-4)^{-2} = (x-4)(x+y-4)^{-2} \overset{!}{=} 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $y = 0$, $x = 4$ che non è ammissibile $((4,0) \notin D)$

(c) Poiché f è $C^1(K)$ e non ha punti critici interni a K, gli estremi di f si trovano su ∂K.

Posto
$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \frac{y}{x+y-4} - \lambda(x^2+y^2-4)$$
devo risolvere

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = -\dfrac{y}{(x+y-4)^2} - 2\lambda x \overset{!}{=} 0 \\ \mathcal{L}_y = \dfrac{x-4}{(x+y-4)^2} - 2\lambda y \overset{!}{=} 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = x^2+y^2-4 \overset{!}{=} 0 \end{cases}$$

Se $y=0$ si ottiene $\underset{}{\overset{\text{(dalla II eq)}}{\vee}}$ $x=4$ e $(4,0) \notin \partial K$

Se $x=0$ " $\underset{\text{(dalla I eq)}}{\wedge}$ $y=0$ e $(0,0) \notin \partial K$

Perciò, moltiplicando la I eq. per y e la II eq. per x, si ottiene

$$-2\lambda xy = \frac{y^2}{(x+y-4)^2} = -\frac{x(x-4)}{(x+y-4)^2} \iff x^2-4x=-y^2$$

$$\iff x^2+y^2-4x=0$$

$$\iff 2x^2-4x-4=0 \qquad \underset{\text{III eq}}{\iff} 4-4x=0$$

Pertanto i candidati sono

$$(1, \pm\sqrt{3})$$

Si ha $\quad f(1,\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3} = \dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$

$\quad f(1,-\sqrt{3}) = \dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$

da cui segue la risposta.

(4) Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy, specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y'(x) + 3 = -\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}\,(y(x) + 3x) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta: $y(x) = e^{-\frac{1}{(1-x^2)}} - 3x \quad x \in (-1,1)$.

Svolgimento:

Conviene utilizzare il cambio di variabile $z(x) = y(x) + 3x$.

In tal modo

$$\begin{cases} z' = -\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}\, z \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

che si risolve come edo lineare omogenea ovvero per separazione di variabili. Lo svolgimento è standard e conduce a

$$z(x) = e^{-\frac{1}{(1-x^2)}}$$

ovvero $\quad y(x) = e^{-\frac{1}{(1-x^2)}} - 3x \quad , \quad x \in (-1,1)$