ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 20.09.2018

A

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente e completamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere alle domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Determinare tutte le coppie di funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, di classe $C^1(\mathbb{R})$, tali che il campo vettoriale

$$\mathbf{V}(x, y) = (2f(x)g(y), f(x)g(y))$$

risulti conservativo in $\mathbb{R}^2$. Per tali coppie, determinare le funzioni potenziale di $\mathbf{V}$.

6 punti

Risposta: $f(x) = C_1 e^{2\lambda x}$, $g(y) = C_2 e^{\lambda y}$, $C_1, C_2, \lambda \in \mathbb{R}$

$U(x,y) = C e^{\lambda(2x+y)} + D$, $C, \lambda, D \in \mathbb{R}$

Svolgimento:

$\mathbb{R}^2$ è sempl. connesso $\Rightarrow$ $\underline{V}$ conservativo $\Leftrightarrow$ $\underline{V}$ irrotazionale

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(2f(x)g(y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f(x)g(y)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2f(x)g'(y) = f'(x)g(y)$$

Quindi $\dfrac{f'(x)}{2f(x)} = \dfrac{g'(y)}{g(y)} = \lambda \in \mathbb{R}$

e risolvendo le due EDO si ottiene la risposta.

Quindi $\underline{V}(x,y) = C_1 C_2 \left(2e^{\lambda(2x+y)}, e^{\lambda(2x+y)}\right)$

che ha il potenziale nella risposta.

(2) Determinare il baricentro del seguente insieme:

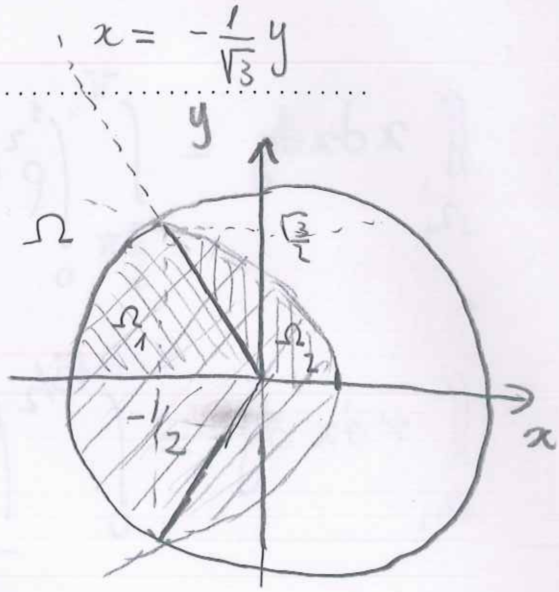
$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1,\ x \le \frac{1}{4} - y^2 \right\}.$$

6 punti

Risposta:

$$x_B = -\frac{1}{\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}} \cdot \frac{7}{20}\sqrt{3}, \quad y_B = 0$$

Svolgimento:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = \frac{1}{4} - y^2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{4} - y^2\right)^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{2}y^2 + y^4 = 1$$

$$y^4 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{15}{16} = 0$$

$$\Delta = \frac{1}{4} + \frac{15}{4} = 4$$

$$y^2 = \frac{-1/2 \pm 2}{2} = \begin{cases} -5/4 & \text{imp} \\ 3/4 \end{cases} \qquad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Simmetria rispetto a $y = 0 \implies y_B = 0$

Per calcolare $|\Omega|$ e x_B si può procedere in vari modi. Per esempio, con Ω_1 e Ω_2 come in figura:

$$|\Omega_1| = \frac{\pi}{6} \qquad |\Omega_2| = \int_0^{\sqrt{3}/2} \int_{-1/\sqrt{3}\,y}^{1/4 - y^2} dx\, dy = \int_0^{\sqrt{3}/2} \left(\frac{1}{4} - y^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y\right) dy$$

$$= \left(\frac{1}{4}y - \frac{y^3}{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}y^2\right)_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

quindi $|\Omega| = 2\left(|\Omega_1| + |\Omega_2|\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9}$

e per simmetria

$$x_B = \frac{1}{|\Omega_1 \cup \Omega_2|} \iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} x \, dx\, dy$$

$$\iint_{\Omega_1} x\, dx\, dy = \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \int_0^1 \rho^2 \cos\varphi \, d\rho\, d\varphi = -\frac{1}{6}\sqrt{3}$$

$$\iint_{\Omega_2} x\, dx\, dy = \int_0^{\sqrt{3}/2} \int_{-y/\sqrt{3}}^{\frac{1}{4}-y^2} x\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}/2} \left(\left(\frac{1}{4} - y^2\right)^2 - \frac{y^2}{3} \right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y}{16} - \frac{5y^3}{18} + \frac{y^5}{5} \right)_0^{\sqrt{3}/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{32} - \frac{5}{\cancel{18}_{6}} \frac{\cancel{3}^{1}}{8} + \frac{1}{5}\cdot\frac{9}{32} \right)\sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \, \frac{15 - 50 + 27}{2^5 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \, \frac{-8}{\cancel{2^5}_{4} \cdot 3 \cdot 5} = \frac{-\sqrt{3}}{120}$$

Perciò

$$x_B = \frac{1}{\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{120} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) = -\frac{1}{\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}} \left(\frac{7}{40}\sqrt{3} \right.$$

(3) Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\gamma(t) = t(1-t)\,(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))\,.$$

a) Determinare la massima e la minima distanza del sostegno di γ da $(0,0)$.

b) Calcolare l'area della regione del piano racchiusa nel sostegno di γ.

6 punti

Risposta: a) $\max = \frac{1}{2}$, $\min = 0$

b) $\pi/30$

Svolgimento:

a) $d(\gamma(t), 0) = t(1-t) \quad t \in (0,1)$

La funzione ha massimo $\frac{1}{2}$ in $t = 1/2$

e minimo 0 in $t = 0,1$.

b) $$|\Omega| = \frac{1}{2} \int_\gamma (x\,dy - y\,dx)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \Big[t(1-t)\cos(2\pi t)\big((1-2t)\sin(2\pi t) + 2\pi t(1-t)\cos(2\pi t)\big) - t(1-t)\sin(2\pi t)\big((1-2t)\cos(2\pi t) - 2\pi t(1-t)\sin(2\pi t)\big)\Big]\,dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 2\pi t^2 (1-t)^2 = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{\pi}{30}(10 - 15 + 6) = \frac{\pi}{30}$$

(4) Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie definita da

$$\Sigma = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2,\ x \geq 0,\ z \leq 1 - 3x^2 - 3y^2\ \}.$$

Calcolare

$$\iint_\Sigma yz \mathrm{d}S.$$

.... $\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta: 0

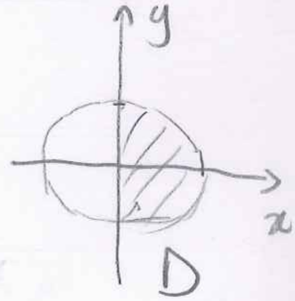
....

Svolgimento:

Superficie cartesiana $\sigma(x,y) = y^2$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ \ y^2 \leq 1 - 3x^2 - 3y^2 \right\}$$

$$\Leftrightarrow\ 3x^2 + 4y^2 \leq 1$$



$$\iint_\Sigma yz \, dS = \iint_D y^3 \sqrt{1 + 4y^2} \, dx dy$$

D è simmetrico rispetto all'asse $y = 0$

La funzione è dispari rispetto a $y = 0$ $\Bigg\} \Rightarrow \iint = 0$

(1) Data l'equazione

$$3x^7y^2 - x^3y^6 = 2 \qquad \text{(si noti che } (x,y) = (1,1) \text{ è soluzione)},$$

dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando la risposta:

(i) per ogni x in un opportuno intorno di 1, esiste un'unica soluzione $y = h(x)$ dell'equazione;

(ii) per ogni y in un opportuno intorno di 1, esiste un'unica soluzione $x = g(y)$ dell'equazione.

Nel caso in cui (i) e/o (ii) sia vera, determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in 1 della funzione $h(x)$ e/o $g(y)$.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di Peano al secondo ordine per funzioni $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ con $N > 1$.