ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 20.06.2019 ~~B~~

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente e completamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere alle domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Calcolare il volume dell'insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definito da

$$\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \geq (x-1)^2 + y^2, \ z \leq 2(x+y), \ y \geq 1 \}.$$

6 punti

Risposta:

4π

Svolgimento:

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y) \in D, \ (x-1)^2 + y^2 \leq z \leq 2(x+y) \right\}$$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 1, \ (x-1)^2 + y^2 \leq 2(x+y) \right\}$$

Quindi

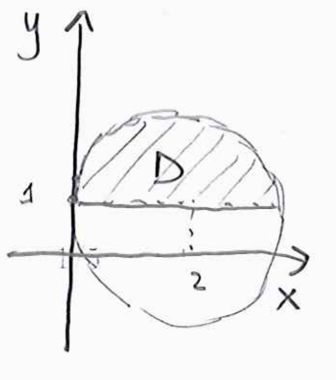
$$\iiint_\Omega 1 \, dx\,dy\,dz = \iint_D \left(2(x+y) - (x-1)^2 - y^2 \right) dx\,dy$$

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 2(x+y) \iff x^2 - 4x + 1 + y^2 - 2y \leq 0$$

$$\iff (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 4$$

Quindi

$$D = \left\{ y \geq 1, \ (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 4 \right\}$$



Analogamente

$$2(x+y)-(x-1)^2-y^2 = 4-(x-2)^2-(y-1)^2$$

Quindi, in coordinate polari $\begin{cases} x = 2+\rho\cos\varphi \\ y = 1+\rho\sin\varphi \end{cases}$

si ottiene

$$\iint_D \left(2(x+y)-(x-1)^2-y^2\right)dx\,dy = \int_0^2\int_0^{\pi}(4-\rho^2)\rho\,d\rho\,d\varphi$$

$$= \pi\left[2\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 = \pi(8-4) = 4\pi$$

(2) Determinare il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = x^3 + xy^2 - 2xy$$

nell'insieme $K \subset \mathbb{R}^2$ definito da

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 - 4y \leq 0\}.$$

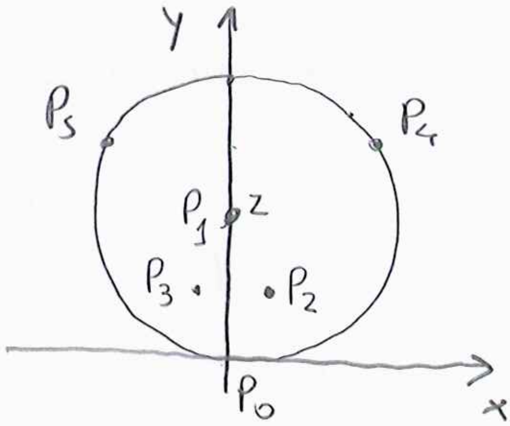
.... 6 punti

Risposta:

$$\max_K f = 6\sqrt{3} \ , \quad \min_K f = -6\sqrt{3}$$

....

Svolgimento:



$$K = \{ x^2 + (y-2)^2 \leq 4 \}$$

Punti critici interni:

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ f_y = 2xy - 2x = 2x(y-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0, 2 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = \pm 1/\sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases}$$

Candidati:

$P_0 = (0,0)$ non interno
$P_1 = (0,2)$
$P_2 = (1/\sqrt{3}, 1)$
$P_3 = (-1/\sqrt{3}, 1)$

Su ∂K si può usare sia il metodo dei moltiplicatori che la parametrizzazione. Con il primo:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = 3x^2 + y^2 - 2y = 2\lambda x \\ \mathcal{L}_y = 2xy - 2x = 2\lambda(y-2) \\ x^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$$

Si noti che $y = 2$ non è soluzione, e che se $x = 0$ allora $y = 0$, da cui il candidato $P_0 = (0,0)$.

Altrimenti, moltiplicando la prima equazione per $(y-2)$ e la seconda per x, si ottiene

$$\begin{cases} \left[3x^2 + y(y-2)\right](y-2) = 2x^2(y-1) \\ x^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2y - 4x^2 + y(y-2)^2 = 0 \\ x^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \cancel{x^2y} - 4x^2 + y(4 - \cancel{x^2}) = 0 \\ x^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 - 3y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} P_0 = (0,0) \\ P_{4,5} = (\pm\sqrt{3}, 3) \end{array}$$

Si ha $\quad 0 = f(P_0) = f(P_1)$

$$f(P_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3} + 1 - 2\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$f(P_4) = \sqrt{3}(3 + 9 - 6) = 6\sqrt{3}$$

e per simmetria $\quad f(P_3) = \frac{2}{3\sqrt{3}}\ , \ f(P_5) = -6\sqrt{3}$

Confrontando i valori si ottiene la risposta. Si noti anche che l'esercizio si semplifica se si osserva che $f(x,y) = x(x^2 + y^2 - 2y) = x(x^2 + y^2 - 4y + 2y) = 2xy$ su ∂K.

(3) Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie definita da

$$\Sigma = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 4x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ x \leq \frac{1}{4} \}.$$

Calcolare i seguenti integrali:

a) $\iint_\Sigma \sqrt{1 + 12x^2} \mathrm{d}S$;

b) $\iint_\Sigma x^2 z^3 \mathrm{d}S$.

.... 6 punti

Risposta:

(a) $\frac{21}{8}\pi$; (b) 0.

....

Svolgimento:

(a) Parametrizzo Σ in coordinate ellittiche con poli sull'asse x:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos\theta \\ y = \sin\theta\cos\varphi \\ z = \sin\theta\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{matrix} \varphi \in [0, 2\pi] \\ \theta \in [0, \pi] \end{matrix}$$

e $\quad x \leq \frac{1}{4} \iff \cos\theta \leq \frac{1}{2} \iff \theta \in [\pi/3, \pi]$

$$\sigma_\theta = \left(-\frac{1}{2}\sin\theta , \cos\theta\cos\varphi , \cos\theta\sin\varphi \right)$$

$$\sigma_\varphi = (0 , -\sin\theta\sin\varphi , \sin\theta\cos\varphi)$$

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = \left(\sin\theta\cos\theta , \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\varphi , \frac{1}{2}\sin^2\theta\sin\varphi \right)$$

$$|\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi| = \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta + \frac{1}{4}\sin^4\theta} = \frac{\sin\theta}{2}\sqrt{\sin^2\theta + 4\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{2}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

Pertanto

$$\iint_{\Sigma} \sqrt{1+12x^2}\, dS = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi} \sqrt{1+3\cos^2\theta} \cdot \underbrace{\frac{\sin\theta}{2}\sqrt{1+3\cos^2\theta}}_{|\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi|}\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} \int_{\pi/3}^{\pi} (1+3\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta$$

$$= \pi \Big[-\cos\theta - \cos^3\theta \Big]_{\pi/3}^{\pi}$$

$$= \pi \left[2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right] = \frac{21}{8}\pi$$

(b) Poiché $x^2 z^3$ è dispari rispetto a $z=0$ e Σ è simmetrica rispetto a $z=0$, l'integrale è nullo.

(4) Si consideri la seguente equazione differenziale ordinaria:

$$x\,y'(x) = y^2(x) - 1.$$

a) Fra tutte le soluzioni, determinare quelle il cui intervallo massimale di esistenza contiene $(0, +\infty)$;

b) per tali soluzioni, elencare i possibili valori del limite per $x \to +\infty$.

6 punti

Risposta: (a) $y \equiv 1$, $y \equiv -1$, $y = \dfrac{1+Kx^2}{1-Kx^2}$, $K<0$.

(b) $\{-1, 1\}$.

Svolgimento:

Per separazione di variabili $\left(0 \notin (0,+\infty)\right)$:

$y(x) \equiv 1$, $y(x) \equiv -1$, oppure

$$\int \frac{dy}{y^2-1} = \int \frac{y'(x)}{y(x)^2-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)dy \qquad \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \log|x| + C$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \frac{y-1}{y+1} = Kx^2, \; K \in \mathbb{R}$$

$$\frac{y-1}{y+1} = Kx^2 \Longleftrightarrow y-1 = Kx^2(y+1) \Longleftrightarrow y(1-Kx^2) = 1+Kx^2$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y(x) = \dfrac{1+Kx^2}{1-Kx^2}, & x^2 \neq \dfrac{1}{K}, \quad K \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ y(x) \equiv 1 & \text{se } K = 0. \end{cases}$$

L'intervallo di esistenza contiene $(0,+\infty)$ se

$\frac{1}{k} < 0$, ovvero $k < 0$, oppure $k = 0$.

(b) $\lim_{x \to +\infty} 1 = 1$

$\lim_{x \to +\infty} -1 = -1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1+kx}{1-kx} = -1 \quad \forall k<0.$