Analisi matematica 2 (I mod) – Ing. Elettronica
PROFF. GIACOMELLI e VERGARA CAFFARELLI
ESEMPI DI ESERCIZI D'ESAME — A.A.08/09

Versione preliminare – si prega di segnalare eventuali errori

---

*) Determinare (purché esistano) i punti di massimo locale, i punti di minimo locale e i punti di sella della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + y^3 - y \ , \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

....

Si ha

$$\begin{cases} f_x(x,y) = x^2 - y^2 = 0 \\ f_y(x,y) = -2xy + 3y^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} y = -x \\ 5y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

da cui segue che i punti critici sono $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (-1, -1)$, $P_3 = (-1/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$, $P_4 = (1/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$. Si ha

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ -2y & 6y - 2x \end{pmatrix}.$$

da cui si deduce che P_1 è un punto di minimo locale, P_2 è un punto di massimo locale, P_3 e P_4 sono punti di sella.

---

*) Determinare i punti di massimo locale, i punti di minimo locale e i punti di sella della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^2 y + \frac{1}{3}y^3 + x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 2y \ , \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

....

Risposta: $(0, 1)$ punto di minimo locale, $(0, -2)$ punto di massimo locale, $(\sqrt{2}, -1)$ e $(-\sqrt{2}, -1)$ punti di sella.

---

*) Determinare i punti di massimo locale, i punti di minimo locale e i punti di sella della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3 + (x - y - 6)^2, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

....

Risposta: $(-6, 6)$ punto di massimo locale, $(2, -2)$ punto di minimo locale, $\pm 2\sqrt{3}(1, 1)$ punti di sella.

---

*) Determinare (purché esistano) i punti di massimo locale, i punti di minimo locale e i punti di sella della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{y^4}{4} + 2x^2 + xy.$$

. . . .

Risposta: $(0,0)$ punto di sella, $\pm(-1/8, 1/2)$ punti di minimo locale.

---

*) Data nel piano l'iperbole

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 3xy + y^2 + 4 = 0\}$$

determinare i punti di Γ che hanno minima distanza dall'origine.

. . . .

Conviene minimizzare la distanza al quadrato, ovvero la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$. Si tratta quindi di trovare i punti di minimo di f vincolati su Γ. Posto

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 3xy + y^2 + 4)\,,$$

si ottiene con semplici calcoli che le soluzioni del sistema

$$\begin{array}{rcl} L_x & = & 2x + \lambda(2x + 3y) = 0 \\ L_y & = & 2y + \lambda(3x + 2y) = 0 \\ L_\lambda & = & x^2 + 3xy + y^2 + 4 = 0 \end{array}$$

sono $(2,-2)$ e $(-2,2)$. Poiché $\sup_\Gamma f = +\infty$, almeno uno dei due punti è di minimo; poiché $f(-2,2) = f(2,-2)$, lo sono entrambi.

---

*) Calcolare

$$\iint_D |y - 2x^2| \ dxdy, \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le 2x \le 3\right\} \ .$$

. . . .

Si ha $3x \le 2$ se e solo se $x \le 1$. e $3x \ge 0$ se e solo se $x \ge 0$. Perciò

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [0,1], \ 0 \le y \le 2x\right\} \ .$$

Quindi

$$\begin{aligned} \iint_D |y - 2x^2| \ dxdy &= \int_0^1 \int_0^{2x} |y - 2x^2| \ dy \ dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{2x^2} (2x^2 - y) \ dy \ dx + \int_0^1 \int_{2x^2}^{2x} (y - 2x^2) \ dy \ dx \\ &= \int_0^1 (4x^4 - 2x^4 + 2x^2 - 4x^3 - 2x^4 + 4x^4) \ dx \\ &= \frac{4}{5} - 1 + \frac{2}{3} = \frac{7}{15} \ . \end{aligned}$$

---

*) Sia

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \le y\,, \ x^2 + y^2 \le 2\right\}.$$

Calcolare

$$\iint_D x^2 y \ dxdy.$$

. . . .

Risposta: $\frac{34}{105}$.

---

*) Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$, e sia

$$D = \left\{(x,y) \in T : x^2 + y^2 \geq 1\right\}.$$

Calcolare

$$\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}\, dxdy$$

(si consiglia il passaggio in coordinate polari).

. . . .

Risposta: $\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

. . . .

*) Sia

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq y \leq 2\,,\ 3-2x \leq y \leq 5-2x\right\}\ .$$

calcolare

$$\iint_D \frac{1}{x^2}\, dxdy.$$

. . . .

Poiché

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq y \leq 2\,,\ \frac{3-y}{2} \leq x \leq \frac{5-y}{2}\right\}\ ,$$

si ottiene

$$\iint_D \frac{1}{x^2}\, dxdy = \int_1^2 \int_{\frac{3-y}{2}}^{\frac{5-y}{2}} \frac{1}{x^2}\, dx\, dy = 2\log\left(\frac{3}{2}\right)\ .$$

---

*) Siano D_1 il settore del disco di centro l'origine e raggio 1 contenuto nel secondo quadrante, D_2 il triangolo di vertici $(-1,0)$, $(0,1)$ e $(0,0)$, e $D = D_1 \setminus D_2$. Calcolare

$$\iint_D xy\, dxdy.$$

. . . .

Risposta: $-1/12$.

---

*) Determinare la lunghezza della seguente curva:

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \left(\frac{e^{-3t}}{3}, \frac{e^{-2t}}{2}\right)\ .$$

. . . .

Si ha

$$\gamma'(t) = (-e^{-3t}, -e^{-2t}), \quad |\gamma'(t)| = \sqrt{e^{-6t}+e^{-4t}} = e^{-2t}\sqrt{1+e^{-2t}}.$$

Pertanto, utilizzando la sostituzione $y = e^{-t}$, si ottiene

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 e^{-2t}\sqrt{1+e^{-2t}}\ dt = \int_{e^{-1}}^1 y\sqrt{1+y^2}\ dy = \frac{1}{3}(1+y^2)^{3/2}\Big|_{e^{-1}}^1 \\ &= \frac{1}{3}\left(2^{3/2} - \left(1+\frac{1}{e^2}\right)^{3/2}\right). \end{aligned}$$

---

*) Siano

$$\gamma : [1, e] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, t\log t - 1)$$

e

$$f(x, y) = \frac{y+1}{x^2}\ .$$

Calcolare

$$\int_\gamma f ds.$$

. . . .

Si ha

$$\dot\gamma(t) = (1, 1+\log t) \quad |\dot\gamma(t)| = \sqrt{1+(1+\log t)^2}, \quad f(\gamma(t)) = \frac{\log t}{t}\ .$$

Perciò

$$\int_\gamma f\ ds = \int_1^e \frac{\log t}{t}\sqrt{1+(1+\log t)^2}\, dt\, .$$

Vi sono vari modi per risolvere tale integrale. Ad esempio, posto $y = 1 + \log t$ si ottiene $dy = dt/t$ e $\log t = y - 1$, ovvero

$$\int_1^e \frac{\log t}{t}\sqrt{1+(1+\log t)^2}\, dt = \int_1^2 (y-1)\sqrt{1+y^2}\, dy = \frac{1}{3}(1+y^2)^{3/2}\Big|_1^2 - \int_1^2 \sqrt{1+y^2}\, dy\,;$$

per il secondo addendo si osserva che, mediante la sostituzione $y = \sinh s$,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+y^2}\, dy &= \int \cosh^2 s\, ds = \sinh s\cosh s - \int \sinh^2 s\, ds \\ &= \sinh s\cosh s - \int (\cosh^2 s - 1)\, ds \\ &= y\sqrt{1+y^2} - \int \sqrt{1+y^2}\, dy + \operatorname{arc\,sinh} y\, , \end{aligned}$$

ovvero

$$\int_1^2 \sqrt{1+y^2}\, dy = \frac{1}{2}\left(y\sqrt{1+y^2} + \operatorname{arc\,sinh} y + C\right)\Big|_1^2\ .$$

Pertanto

$$\int_1^e \frac{\log t}{t}\sqrt{1+(1+\log t)^2}\, dt = \frac{2}{3}\sqrt{5} - \frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,sinh} 2 - \operatorname{arc\,sinh} 1).$$

---

*) Sia

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \big(t^3, t\big)\ .$$

Calcolare
$$\int_\gamma x \; ds.$$
....

Risposta: $\frac{10^{3/2}-1}{54}$.

---

*) Sia
$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \left(\frac{t^2}{2} \; , \; \frac{t^3}{3} \right).$$
Calcolare
$$\int_\gamma (1+x) \; ds.$$
....

Risposta: $(11\sqrt{2}-4)/15$.

---

*) (a) Determinare (purché esistano) i valori di $A \in \mathbb{R}$ per i quali la forma
$$\omega(x,y) = \frac{1}{x} \; dx + \left(Axy + \frac{1}{y} \right) \; dy$$
è chiusa in $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x > 0, \; y > 0\big\}$.
(b) Calcolare
$$\int_{\partial B^+} \frac{1}{x} \; dx + \left(xy + \frac{1}{y} \; dy \right), \qquad B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; (x-2)^2 + (y-3)^2 \le 1\big\} \; .$$
....

(a) Si ha
$$0 = \partial_y(1/x) \overset{!}{=} \partial_x(Axy + 1/y) = Ay \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = 0 \; .$$
(b) Utilizzando il teorema della divergenza
$$\int_{\partial B^+} \frac{1}{x} \; dx + \left(xy + \frac{1}{y} \right) \; dy = \iint_B y \; dxdy$$
e passando in coordinate polari, $(x,y) = (2 + r\cos\theta, 3 + r\sin\theta)$,
$$\iint_B y \; dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(3 + r\sin\theta) \; d\theta \; dr = 3\pi \; .$$

---

*) Determinare (purché esistano) i valori di $A \in \mathbb{R}$ per i quali la forma differenziale
$$\omega = \frac{1}{\cos^2(xy)} \left(\left(\frac{\sin(2xy)}{1+A^2} + xy \right) dx + x^2 \, dy \right)$$
è esatta in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; |2xy| < \pi\}$.
....

Risposta: $A = \pm 1$.

---

*) (a) Determinare una primitiva della forma differenziale

$$\omega(x,y) = \arctan(y)\ dx + \left(\frac{x}{1+y^2} + 3y\right)\ dy\ .$$

(b) Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da $\gamma(t) = (\log(e+t), 1-t)$. Calcolare

$$\int_{+\gamma} \omega\ .$$

. . . .

Risposta: (a) $U(x,y) = x\arctan(y) + \frac{3}{2}y^2$; (b) $U(\log(e+1),0) - U(1,1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}$.

---

*) Siano

$$\omega = \frac{x^2-y^2}{x^2y^2}\,(y\,dx - x\,dy)$$

e

$$\gamma : \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (2+\cos t, 2+\sin t).$$

Calcolare

$$\int_\gamma \omega.$$

. . . .

Si cerca, se esiste, una primitiva U di ω: integrando rispetto a x

$$U(x,y) = \int \frac{x^2-y^2}{x^2y}\,dx = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right) dx = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + C(y),$$

da cui

$$U_y = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} + c'(y) = \frac{y^2-x^2}{xy^2} + C'(y),$$

quindi

$$U_y dy = -\frac{x^2-y^2}{xy^2}dy \iff C'(y) = 0.$$

Perciò ω è esatta e $U(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + C$. Si ha quindi

$$\int_\gamma \omega = U(\gamma(2\pi)) - U(\gamma(3\pi/2)) = U(3,2) - U(2,1) = -\frac{1}{3}.$$

---

*) Sia ω la forma differenziale in $\mathbb{R}^2$ definita da

$$\omega = \Big(A(x^2y + y^2 + 1) + 2e^y - ye^x\Big)dx + \left(\frac{x^3}{3} + 2xy + B(2xe^y - e^x)\right) dy$$

e sia $\gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

Determinare (purché esistano) i valori di $A \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathbb{R}$ per i quali ω è esatta in $\mathbb{R}^2$; per tali valori, calcolare

$$\int_{+\gamma} \omega \; .$$

....

Risposta: $A = B = 1$; -4.

---

*) Calcolare

$$\int_{\partial D^+} \frac{dz}{z^4 - 3z^2 - 18}, \qquad D = \{z \in \mathbb{C} : \; |z| \leq 2\} \, .$$

....

Si ha

$$s^2 - 3s - 18 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad s = 6 \;\text{ oppure }\; s = -3.$$

Perció

$$z^4 - 3z^2 - 18 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = z_i, \quad i = 1, \ldots, 4,$$

dove

$$z_1 = \sqrt{6}, \; z_2 = -\sqrt{6}, \; z_3 = i\sqrt{3}, \; z_4 = -i\sqrt{3}$$

che sono i quattro poli (del primo ordine) della funzione integranda. Poiché $z_1, z_2 \notin D$, $z_3, z_4 \in D$,

$$R(z_3) = \lim_{z \to z_3} \frac{z - z_3}{z^4 - 3z^2 - 18} = \lim_{z \to z_3} \frac{1}{(z^2 - 6)(z + i\sqrt{3})} = \frac{i}{18\sqrt{3}}$$

e

$$R(z_4) = \lim_{z \to z_4} \frac{z - z_4}{z^4 - 3z^2 - 18} = \lim_{z \to z_4} \frac{1}{(z^2 - 6)(z - i\sqrt{3})} = -\frac{i}{18\sqrt{3}},$$

si conclude che l'integrale vale 0.

---

*) Calcolare

$$\int_{\partial D^+} \frac{dz}{z^2 - 3iz - 2}, \qquad D = \left\{z \in \mathbb{C} : \; |z - 1| \leq \sqrt{3}\right\} .$$

....

Risposta: -2π.

---

*) Sia $Q \subset \mathbb{C}$ il quadrato di vertici $\pm 1 \pm i$. Calcolare

$$\int_{+\partial Q} \frac{\cos z}{z^3} \, dz \, .$$

....

Risposta: $-i\pi$.

---

*) Sia $Q \subset \mathbb{C}$ la corona circolare di centro l'origine e raggi $1/2$ e $3/2$. Calcolare

$$\int_{+\partial Q} \frac{\sin z}{z^3 - (2 + i)z^2 + 2iz} \, dz \, .$$

. . . .

Risposta: $2\pi \sin(i)/(i-2)$.

---

*) Determinare la trasformata di Laplace della funzione

$$f(x) = \begin{cases} xe^{3x} & \text{se } x \in [0,2] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

. . . .

Si ha

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^\infty f(x)e^{-px}\, dx = \int_0^2 xe^{(3-p)x}\, dx$$

e integrando per parti si ottiene

$$\mathcal{L}[f](p)\frac{1+(5-2p)e^{6-2p}}{(3-p)^2}.$$

(si osservi che l'ascissa di convergenza è $-\infty$ poiché f è a supporto compatto; lo studente controlli che la singolarità di $\mathcal{L}[f](p)$ in $p=3$ è apparente e quindi $\mathcal{L}[f](p)$ è analitica in tutto $\mathbb{C}$).

---

*) Determinare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{se } x \in (-\pi, \pi] \setminus \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

. . . .

La funzione è pari, quindi si sviluppa in serie di soli coseni. Si ha

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\, dx = \frac{1}{2}, \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(kx)\, dx = \frac{1}{k\pi}\sin(kx)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right), \quad k \geq 1, \end{aligned}$$

ovvero

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2j, \\ \frac{2(-1)^j}{(2j+1)\pi} & \text{se } k = 2j+1, \end{cases} \qquad j \geq 0.$$

Perciò

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2j+1}\cos((2j+1)x).$$