ANALISI MATEMATICA — ING. GESTIONALE (A-L) — PROVA PRATICA — 11.01.10

Cognome e nome: .... **Matricola:** ....

È consentita solo la consultazione di un libro di testo di teoria. È vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per l'ammissione alla prova teorica, svolgere correttamente 3 esercizi contrassegnati dall'asterisco (*) e ottenere almeno 18 punti. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento contiene 5 domande numerate da 1 a 5.

VERSIONE PRELIMINARE - SI PREGA DI SEGNALARE POSSIBILI INESATTEZZE

(1)* Determinare il dominio naturale D, l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione $f : D \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \tfrac{1}{8}\, x^8 - \log\left(x^3\right) \; .$$

.... 7 punti

Risposta:

$D = (0, +\infty)$, $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\frac{3}{8}(\log 3 - 1)$.

....

Svolgimento:

Si ha

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} : \; x^3 > 0\right\} = (0, +\infty).$$

La funzione è derivabile in D e risulta

$$f'(x) = x^7 - \frac{3}{x} \gtreqless 0 \iff x \gtreqless 3^{1/8}.$$

Perciò f è decrescente in $(0, 3^{1/8})$, crescente in $(3^{1/8}, +\infty)$, e $x = 3^{1/8}$ è punto di minimo locale e assoluto. La risposta segue osservando che

$$f(3^{1/8}) = -\frac{3}{8}(\log 3 - 1) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

(2)* Determinare il carattere (convergente, divergente o irregolare) della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^6+k^4}-k^3}\ .$$

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

Divergente a $+\infty$.

. . . .

Svolgimento:

Si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{k^6+k^4}-k^3} &= \frac{1}{k^3\left(\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}-1\right)} \\
&= \frac{1}{k^3\cdot\frac{1}{2k^2}(1+o(1))} \\
&= \frac{2}{k}(1+o(1)) \qquad \text{per} \quad k\to+\infty,
\end{aligned}$$

e la risposta segue dal criterio del confronto (o del confronto asintotico).

(3)* Calcolare

$$\int_{\pi/2}^{\pi} (\sin x - 1)^5 \cos x \, dx \, .$$

. . . . 7 punti

Risposta:

1/6.

. . . .

Svolgimento:

Mediante la sostituzione $y = \sin x$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int (\sin x - 1)^5 \cos x \, dx &= \int (y-1)^5 \, dy \\ &= \frac{1}{6}(y-1)^6 + C \\ &= \frac{1}{6}(\sin x - 1)^6 + C. \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin x - 1)^5 \cos x \, dx &= \frac{1}{6}(\sin \pi - 1)^6 - \frac{1}{6}(\sin \frac{\pi}{2} - 1)^6 \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(4)* Determinare l'area del seguente insieme:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 - 2 \le y \le -|x|\} \; .$$

.... 7 punti

Risposta:

13/3.

....

Svolgimento:

Tracciando il grafico qualitativo di Ω, è immediato verificare che Ω è un dominio semplice:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : x \in [-1,1], \; x^2 - 2 \le y \le -|x|\} \; .$$

Per simmetria,

$$|\Omega| = 2|\Omega_1|, \quad \Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : x \in [0,1], \; x^2 - 2 \le y \le -x\} \; ,$$

con Ω_1 semplice. Perciò

$$\begin{aligned} |\Omega| = 2|\Omega_1| \; &= \; 2\int_0^1 \left(\int_{x^2-2}^{-x} dy \right) dx \\ &= \; 2\int_0^1 (-x + 2 - x^2) dx \\ &= \; \frac{7}{3} \; . \end{aligned}$$

(5) Al variare di $\alpha \in (2/5, +\infty)$ determinare, purché esista, l'ordine di infinito o di infinitesimo per $x \to 0^+$ della funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{\log(1 + x^{5\alpha})}{x^2} - \sin\left(x^{5\alpha-2}\right) \ .$$

.... 8 punti

Risposta:

Infinitesima di ordine: $15\alpha - 6$ se $\alpha \in (2/5, 4/5)$, 6 se $\alpha = 4/5$, $10\alpha - 2$ se $\alpha \in (4/5, +\infty)$.

....

Svolgimento:

Poiché $5\alpha - 2 > 0$, si ha $x^{5\alpha} \to 0$ e $x^{5\alpha-2} \to 0$ per $x \to 0^+$. Segue quindi dagli sviluppi di Taylor centrati in $y = 0$ delle funzioni $y \mapsto \log(1 + y)$ e $y \mapsto \sin(y)$ che

$$\begin{aligned}
&\frac{\log(1 + x^{5\alpha})}{x^2} - \sin\left(x^{5\alpha-2}\right) \\
&= \ x^{5\alpha-2} - \frac{1}{2}x^{10\alpha-2} + o(x^{10\alpha-2}) - \left(x^{5\alpha-2} - \frac{1}{6}x^{15\alpha-6} + o(x^{15\alpha-6})\right) \\
&= \ -\frac{1}{2}x^{10\alpha-2} + o(x^{10\alpha-2}) + \frac{1}{6}x^{15\alpha-6} + o(x^{15\alpha-6}) \quad \text{per} \ \ x \to 0^+.
\end{aligned}$$

Poiché

$$10\alpha - 2 < 15\alpha - 6 \iff 5\alpha > 4 \iff \alpha > 4/5,$$

si ottiene

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^{15\alpha-6}(1 + o(1)) & \text{se} \ \ \alpha \in (2/5, 4/5) \\ -\frac{1}{3}x^6(1 + o(1)) & \text{se} \ \ \alpha = 4/5 \\ -\frac{1}{2}x^{10\alpha-2}(1 + o(1)) & \text{se} \ \ \alpha \in (4/5, +\infty) \end{cases} \qquad \text{per} \ \ x \to 0^+ \ .$$