ANALISI MATEMATICA — ING. GESTIONALE (A-L) — PROVA PRATICA — 11.06.10

Cognome: .... **Nome:** ....

È consentita solo la consultazione di un libro di testo di teoria. È vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per l'ammissione alla prova teorica, è sufficiente svolgere correttamente 3 esercizi contrassegnati dall'asterisco (*) e ottenere almeno 18 punti. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento contiene 5 domande numerate da 1 a 5.

VERSIONE PRELIMINARE - si prega di segnalare gli errori

(1)* Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare il carattere (convergente, divergente o irregolare) della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\sin k + k)^{3-2\alpha}} \, .$$

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

La serie è convergente per $\alpha < 1$, divergente a $+\infty$ altrimenti.

....

Svolgimento:

Si osserva che

$$\sin k + k = k\left(1 + \frac{\sin k}{k}\right) = k(1 + o(1)) \quad \text{per} \quad k \to +\infty.$$

Perciò il risultato segue dal teorema del confronto con la serie armonica generalizzata $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3-2\alpha}}$.

(2)* Determinare l'estremo superiore, l'estremo inferiore, gli eventuali punti di massimo locale e gli eventuali punti di minimo locale della funzione $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x^4 - 2x + 2, \quad x \in [0, 2] \ .$$

. . . . 7 punti

Risposta:

$x = 0$ e $x = 2$ punti di massimo locale, $x = 2^{-1/3}$ punto di minimo locale;

$\inf f = 2^{-4/3} - 2^{2/3} + 2$, $\sup f = 14$.

. . . .

Svolgimento:

La funzione è continua e derivabile in $[0, 2]$, che è compatto. In particolare, ammette massimo e minimo assoluto ed essi coincidono rispettivamente con gli estremi superiore e inferiore. Si ha

$$f'(x) = 4x^3 - 2 \gtreqless 0 \ \text{ se e solo se } x \gtreqless 2^{-1/3} \ .$$

Perciò f è strettamente decrescente in $[0, 2^{-1/3}]$ e strettamente crescente in $[2^{-1/3}, 2]$. Quindi $x = 0$ e $x = 2$ sono punti di massimo locale e $x = 2^{-1/3}$ è un punto di minimo locale. Essendo l'unico minimo, quest'ultimo è anche punto di minimo assoluto e $\min f = f(2^{-1/3}) = 2^{-4/3} - 2^{2/3} + 2$. Infine $f(0) = 2 < 14 = f(2)$, quindi $\max f = 14$.

(3)* Determinare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{6+6x+x^2-6e^{\sin x}}{x^2}.$$

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

-2.

. . . .

Svolgimento:

Si ha

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1+\sin x+\frac{1}{2}(\sin x)^2+o((\sin x)^2) \\ &= 1+x+o(x^2)+\frac{1}{2}(x+o(x^2))^2+o((x+o(x^2))^2) \\ &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2) \quad \text{per} \quad x\to 0^+ \end{aligned}$$

Perciò

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{6+6x+x^2-6e^{\sin x}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^2+o(x)^2}{x^2} = -2.$$

(4)* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \min\{x, 3\} \ .$$

Calcolare

$$\int_0^\pi f(x)\,dx \ .$$

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$3\pi - 9/2$.

. . . .

Svolgimento:

Si ha

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 3 \\ 3 & x > 3 \ . \end{cases}$$

Perciò

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = \int_0^3 x\,dx + \int_3^\pi 3\,dx = \frac{9}{2} + 3(\pi - 3) = 3\pi - 9/2.$$

(5) (*a*) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare la soluzione $y_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + \alpha^2 y(x) = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = \alpha\ . \end{cases}$$

(*b*) Per ogni $x \geq 0$ determinare, se esiste,

$$\lim_{\alpha \to +\infty} y_\alpha(x)\ .$$

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

(*a*) $y_\alpha(x) = \sin(\alpha x)$; (*b*) 0 se $x = 0$, altrimenti non esiste.

....

Svolgimento:

L'equazione è del secondo ordine, lineare, omogenea e a coefficienti costanti. Si ha

$$\lambda^2 + \alpha^2 = 0 \iff \lambda = \pm i\alpha.$$

Quindi l'integrale generale è

$$y(x) = A\cos(\alpha x) + B\cos(\alpha x)$$

e imponendo le condizioni in $x = 0$ si ottiene

$$y_\alpha(x) = \sin(\alpha x)\ .$$

Nota la soluzione, la seconda parte è immediata:

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \sin(\alpha x) \begin{cases} = 0 & \text{se } x = 0 \\ \nexists & \text{se } x > 0\ . \end{cases}$$