ANALISI MATEMATICA — ING. GESTIONALE (A-L) — PROVA PRATICA — 06.06.12

Cognome: .... **Nome:** ....

È consentita solo la consultazione di un libro di testo di teoria. È vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per l'ammissione alla prova teorica, è sufficiente svolgere correttamente e completamente 3 esercizi e ottenere almeno 18 punti. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento contiene 5 domande numerate da 1 a 5.

(1) Determinare l'estremo superiore, l'estremo inferiore, gli eventuali punti di massimo locale e gli eventuali punti di minimo locale della funzione $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \cos(2x) + 2\sin x, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

.... 7 punti

Risposta:

$x = -\pi$, $x = \pi/6$, $x = 5\pi/6$ punti di massimo locale, $x = \pm\pi/2$ e $x = \pi$ punti di minimo locale, $\sup f = 3/2$, $\inf f = -3$.

....

Svolgimento:

Si ha

$$f'(x) = -2\sin(2x) + 2\cos x = 2\cos x(-2\sin x + 1).$$

Poiché

$$\cos x > 0 \iff x \in (-\pi/2, \pi/2) \quad \text{e} \quad -2\sin x + 1 > 0 \iff x \in [-\pi, \pi/6) \cup (5\pi/6, \pi]$$

si ottiene

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-\pi/2, \pi/6) \cup (\pi/2, 5\pi/6)$$

da cui segue la risposta.

(2) Determinare il carattere (convergente, divergente o irregolare) della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k^{2k}}.$$

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

Convergente.

....

Svolgimento:

Criterio del rapporto:

$$\frac{(2k+2)!}{(k+1)^{2k+2}} \frac{k^{2k}}{(2k)!} = \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{2k} \to \frac{4}{e^2} < 1 \quad \text{per} \quad k \to +\infty,$$

da cui segue la risposta.

(3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - e^{\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}\right).$$

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$-\infty$.

....

Svolgimento:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - e^{\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}\right) &= \lim_{y\to 0^+} \frac{e^{y^{1/2}} - e^{y^{1/4}}}{y^{1/3}} \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{y^{1/2}(1+o(1)) - y^{1/4}(1+o(1))}{y^{1/3}} \\
&= \lim_{y\to 0^+} -y^{1/4-1/3}(1+o(1)) = -\infty.
\end{aligned}$$

(4) Calcolare il seguente integrale:

$$\iint_D \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 1, \ x \geq 1/2\right\}.$$

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

1/8

. . . .

Svolgimento:

Passando in coordinate polari centrate nell'origine:

$$x^2+y^2 \leq 1 \iff \rho \leq 1, \quad x \geq 1/2 \iff \rho\cos\varphi \geq 1/2 \iff \begin{cases} \varphi \in (-\pi/2, \pi/2) \\ \rho \geq \frac{1}{2\cos\varphi} \end{cases}$$

e

$$\rho \geq \frac{1}{2\cos\varphi} \leq 1 \iff \varphi \in (-\pi/3, \pi/3).$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_{\frac{1}{2\cos\varphi}}^{1} |\rho\sin\varphi| \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\int_0^{\pi/3}\int_{\frac{1}{2\cos\varphi}}^{1} \rho\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi \\ &= 1/4. \end{aligned}$$

(5) Risolvere il seguente problema di Cauchy, specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y^2(x)}{\sqrt{x}} \\ y(1) = \frac{1}{4} \end{cases} .$$

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$y(x) = \frac{1}{2(3-\sqrt{x})}$, $x \in (0, 9)$.

....

Svolgimento: L'equazione assegnata è a variabili separabili. La soluzione critica $y(x) \equiv 0$ non soddisfa la condizione iniziale. Si ha quindi che:

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

che, una volta integrata, fornisce

$$-\frac{1}{y(x)} = 2\sqrt{x} + c \Longleftrightarrow y(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x} + c}.$$

Imponendo la condizione iniziale si trova che $c = -6$ per cui la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = \frac{1}{2(3 - \sqrt{x})}.$$

e poiché la condizione iniziale è data in $x_0 = 1$ segue la risposta.