



Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente e completamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere alle domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 - x^2 - y^2 - x + 1.$$

- a) Determinare i punti critici di f e specificarne la natura.
 b) Determinare il massimo assoluto ed il minimo assoluto di f vincolati su $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$.

6 punti

Risposta:

a) $(-1/3, 0)$ pto di massimo locale
 $(1, 0)$ pto di sella

b) $\min f = -\sqrt{2} - 1$, $\max f = \sqrt{2} - 1$

Si ha Svolgimento:

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0 \\ f_y = 2xy - 2y = 2y(x-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2x - 1 = 3(x-1)(x+1/3) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y^2 = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

pertanto i punti critici sono $(1, 0)$ e $(-1/3, 0)$.

Si ha

$$D^2f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x-2 & 2y \\ 2y & 2x-2 \end{pmatrix},$$

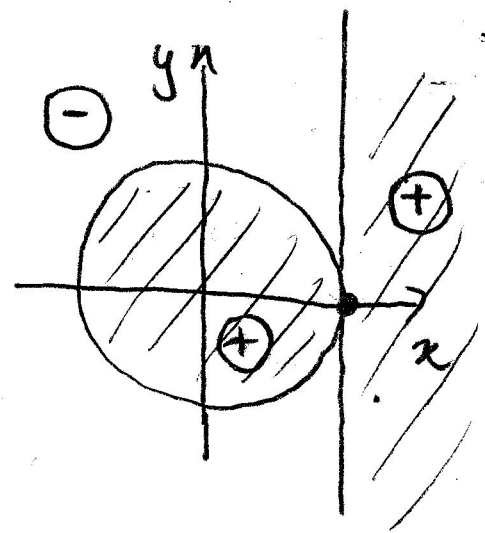
$$D^2f(1, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^2f(-1/3, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8/3 \end{pmatrix}$$

quindi $(-1/3, 0)$ è punto di massimo locale.

Per stabilire la natura di $(1,0)$
si osserva che

$$f(x,y) = (x-1)(x^2+y^2-1) \quad (\Delta)$$

da cui il segno di f indicato
in figura. Pertanto $(1,0)$ è un
punto di sella.



Utilizzando (Δ) , si ha

$$f|_{\Gamma} = (x-1), \quad x^2+y^2=2 \quad \text{ovvero } x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$\text{quindi } \min_{\Gamma} f = -\sqrt{2}-1, \quad \max_{\Gamma} f = \sqrt{2}-1$$

(2) Calcolare area e baricentro del seguente insieme:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq -\sqrt{2}y^2\}.$$

6 punti

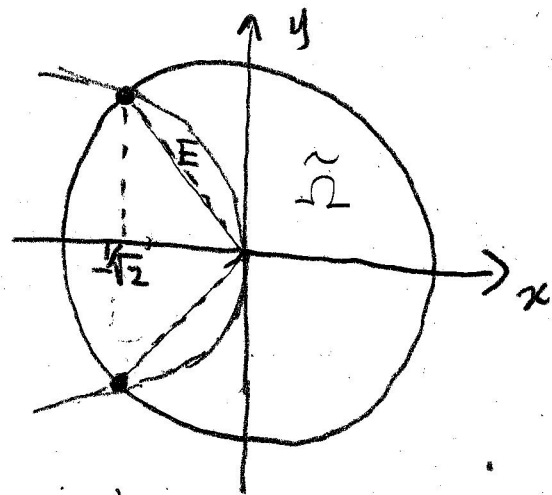
Risposta:

$$|\Omega| = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{6}$$

$$y_B = 0, \quad x_B = \frac{1}{\frac{3\pi}{8} - \frac{1}{12}} \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{40} \right)$$

Svolgimento:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 1 & \Leftrightarrow 2y^4 + y^2 - 1 = 0 \\ x = -\sqrt{2}y^2 & \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Questo è solo uno tra i vari possibili metodi:

$$\tilde{\Omega} = \Omega \cap \{y > 0\} \quad |\tilde{\Omega} \cup E| = \frac{3}{8}\pi$$

$$|E| = \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_{-y}^{-\sqrt{2}y^2} 1 \, dx \, dy = \int_0^{1/\sqrt{2}} (y - \sqrt{2}y^2) \, dy$$

$$= \left(\frac{y^2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} y^3 \right) \Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$|\tilde{\Omega}| = |\tilde{\Omega} \cup E| - |E| = \frac{3}{8}\pi - \frac{1}{12}$$

Per simmetria, $y_B = 0$ e $x_B =$ baricentro di $\tilde{\Omega}$, che ora calcoliamo.

$$\alpha_B = \frac{1}{|\tilde{\Omega}|} \iint_{\tilde{\Omega}} x \, dx \, dy = \frac{1}{|\tilde{\Omega}|} \left(\iint_{\tilde{\Omega} \cup E} x \, dx \, dy - \iint_E x \, dx \, dy \right)$$

Si ha, passando in coordinate piane,

$$\iint_{\tilde{\Omega} \cup E} x \, dx \, dy = \int_0^{3/4\pi} \int_0^1 r^2 \cos \varphi \, dr \, d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{3/4\pi} \cos \varphi \, d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\begin{aligned} \iint_E x \, dx \, dy &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_{-y}^{-\sqrt{2}y^2} x \, dx \, dy = \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right) dy \\ &= \left(\frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{6} \right) \Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{40} - \frac{\sqrt{2}}{24} \end{aligned}$$

quindi

$$\alpha_B = \frac{1}{\frac{3\pi}{8} - \frac{1}{12}} \sqrt{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{40} \right)$$

(3) Per $A \in \mathbb{R}$, sia $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$V(x, y, z) = \left(\frac{yz}{1+x^2z^2} + Ay, \arctan(xz) + x, \frac{xy}{1+x^2z^2} \right)$$

e sia Σ^+ la superficie definita da $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0\}$ e orientata in modo tale che $\mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{e}_3 > 0$.

a) Determinare A in modo tale che V sia conservativo; per tale valore di A , determinarne le funzioni potenziale.

b) Per $A = 2$, calcolare la circuitazione di V intorno a $\partial\Sigma^+$.

6 punti

Risposta: a) $A=1, U(x, y, z) = y \arctan(xz) + xy + C$

b) $\int_{\partial\Sigma} \underline{v} \cdot \underline{t}^+ ds = -\pi$

Svolgimento:

Determino le funzioni potenziale

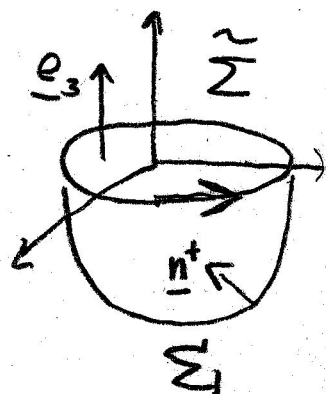
$$U(x, y, z) = \int (\arctan(xz) + x) dy = y \arctan(xz) + xy + C(x, z)$$

$$U_x = \frac{yz}{1+x^2z^2} + y + \partial_x C \stackrel{!}{=} \frac{yz}{1+x^2z^2} + Ay \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ C=C(z) \end{cases}$$

$$U_z = \frac{xy}{1+x^2z^2} + \partial_z C \stackrel{!}{=} \frac{xy}{1+x^2z^2} \Leftrightarrow C=C$$

Quindi $U(x, y, z) = y \arctan(xz) + xy + C$

b) Si osserva che $\int_{\partial\Sigma} \underline{v} \cdot \underline{t}^+ ds = \int_{\partial\tilde{\Sigma}} \underline{v} \cdot \underline{t}^+ ds$



dove $\tilde{\Sigma}^+ = \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$

con $\tilde{\mathbf{n}}^+ = \mathbf{e}_3$

3/5

(questa osservazione semplifica ma non è essenziale)

Applicando il teorema del rotore,

$$\int_{\partial \tilde{\Sigma}} \underline{v} \cdot \underline{t}^+ ds = \iint_{\tilde{\Sigma}} \operatorname{rot} \underline{v} \cdot \underline{e}_3 dS'$$

Per $A=2$, si ha

$$\underline{v} = \left(\frac{yz}{1+x^2+z^2} + y, \operatorname{arctg}(xz) + \pi, \frac{xy}{1+x^2+z^2} \right) + (y, 0, 0)$$

$\operatorname{rot} \underline{v} = \underline{0}$ per il punto (a)

quindi $\operatorname{rot} \underline{v} \cdot \underline{e}_3 = (\operatorname{rot}(y, 0, 0)) \cdot \underline{e}_3 = (\partial_x 0 - \partial_y y) = -1$

$$\text{e } \iint_{\tilde{\Sigma}} \operatorname{rot} \underline{v} \cdot \underline{e}_3 dS = -|\Sigma| = -\pi$$

(4) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \frac{(y')^2(2y-1)}{y(y-1)} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 2, \end{cases}$$

specificando il suo intervallo massimale di esistenza.

6 punti

Risposta:

$$y(x) = \left(1 - \frac{1}{2}e^x\right)^{-1}, \quad x \in (-\infty, \log 2)$$

Svolgimento:

$$\int \frac{y''}{y'} dx = \int \frac{y'(2y-1)}{y(y-1)} dx \Leftrightarrow \log |y'| = \log |y^2 - y| + C$$
$$\Leftrightarrow y' = C(y^2 - y)$$

$$y'(0) = 2 = C(4 - 2) = C(y^2(0) - y(0)) \Leftrightarrow C = 1$$

$$\int \frac{y'}{y^2 - y} dx = \int 1 dx \Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right) dy = x$$

$$\Leftrightarrow \log \left| \frac{y-1}{y} \right| = x + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{y-1}{y} = Ce^x$$

$$\frac{y(0)-1}{y(0)} = \frac{1}{2} = C \Rightarrow \frac{y-1}{y} = \frac{1}{2}e^x \Rightarrow$$

$$y\left(1 - \frac{1}{2}e^x\right) = 1 \Leftrightarrow y = \left(1 - \frac{1}{2}e^x\right)^{-1}$$

$$1 - \frac{1}{2}e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \log 2$$

(5) Rispondere alle domande che saranno distribuite durante il compito.

8 punti

Svolgimento:

B.1) Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, sia Γ l'insieme di livello zero di f e sia $(x_0, y_0) \in \Gamma$ tale che $f_y(x_0, y_0) \neq 0$.

- a) Cosa afferma il teorema delle funzioni implicite (di Dini) riguardo a Γ in un intorno di (x_0, y_0) ?
- b) Quali sono la retta tangente e il versore normale a Γ in (x_0, y_0) , e perché?

B.2) Sia $\gamma^+ : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una curva regolare orientata, $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ un campo vettoriale di classe C^1 .

- a) Come sono definiti $\int_{\gamma} f(\mathbf{x}) ds$ e $\int_{\gamma^+} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$?
- b) Come spiegheresti, attraverso esempi, il loro significato nelle applicazioni?
- c) Che relazione c'è tra i due tipi di integrale?