



Cognome: **VERSIONE** ..... Nome: **PRELIMINARE** .....

Solo durante le prime due ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente e completamente almeno due esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere alle domande che saranno consegnate dopo due ore.

(1) Sia  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + 2y^4 = 2\}$ .

- a) Determinare i punti di  $\Gamma$  che hanno minima e massima distanza dall'origine.  
 b) Scrivere una parametrizzazione di  $\Gamma \cap \{x < 0, y > 0\}$  e tracciarne il grafico.

punti: 4+2

Risposta: a)  $(0, \pm 1)$  punti di minima distanza  
 $(\pm (4/3)^{1/4}, \pm (1/3)^{1/4})$  pt. di massima distanza

b) vedi svolgimento

Svolgimento:

a) Poiché  $z \mapsto \sqrt{z}$  è strettamente monotona, è equivalente massimizzare / minimizzare la distanza al quadrato (ma i calcoli senza questa osservazione non sono più complicati):

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x^4 + 2y^4 - 2)$$

$$\begin{cases} L_x = 2x - 4\lambda x^3 = 2x(1 - 2\lambda x^2) = 0 \\ L_y = 2y - 8\lambda y^3 = 2y(1 - 4\lambda y^2) = 0 \\ L_\lambda = x^4 + 2y^4 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^4 = 1 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} y = 0 \\ x^4 = 2 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{4y^2} \\ x^4 + 2y^4 = 2_{1/5} \end{cases}$$

da cui segue

$$P_{1,2} = (0, \pm 1), \quad P_{3,4} = (\pm 2^{1/4}, 0), \quad P_{5,6,7,8} = \left( \pm \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4}, \pm \left(\frac{1}{3}\right)^{1/4} \right)$$

Calcolando

$$(x^2 + y^2) \Big|_{P_{1,2}} = 1$$

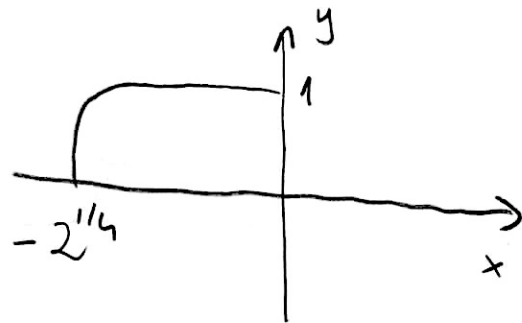
$$(x^2 + y^2) \Big|_{P_{3,4}} = \sqrt{2}$$

$$(x^2 + y^2) \Big|_{P_{5,6,7,8}} = \sqrt{3}$$

si ottiene la risposta.

$$b) \quad y^4 = 1 - \frac{x^4}{2}$$

$$y = \left(1 - \frac{x^4}{2}\right)^{1/4}$$



$$\text{Quindi } x \mapsto \left(x, \left(1 - \frac{x^4}{2}\right)^{1/4}\right) \quad x \in [-2^{1/4}, 0]$$

è una parametrizzazione (cartesiana), da cui segue il grafico in figura

(2) Sia

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, \frac{\sqrt{y}}{2} \leq x \leq \sqrt{y}, \frac{y}{2} \leq x \leq y \right\}.$$

Calcolare

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{y^2} dx dy.$$

punti: 6

Risposta:

$$\log 2$$

Svolgimento:

Si ha  $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{\sqrt{y}} \leq 1$ ,  $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 1$

Posto  $\begin{cases} u = \frac{x}{\sqrt{y}} \\ v = \frac{x}{y} \end{cases}$   $\begin{cases} y = \frac{x^2}{u^2} = \frac{y^2 v^2}{u^2} \\ x = yv \end{cases}$

ovvero  $\begin{cases} x = \frac{u^2}{v} \\ y = \frac{u^2}{v^2} \end{cases}$   $J = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2u}{v} & -\frac{u^2}{v^2} \\ \frac{2u}{v^2} & -\frac{2u^2}{v^3} \end{pmatrix}$

$$|\det J| = \left| -\frac{4u^3}{v^4} + \frac{2u^3}{v^4} \right| = \frac{2u^3}{v^4},$$

si ottiene

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{y^2} dx dy = \iint_{[1/2, 1]^2} \frac{v^4}{u^4} \cdot \frac{2u^3}{v^4} du dv$$

$$= \int_{1/2}^1 \frac{1}{u} du = \log 2.$$

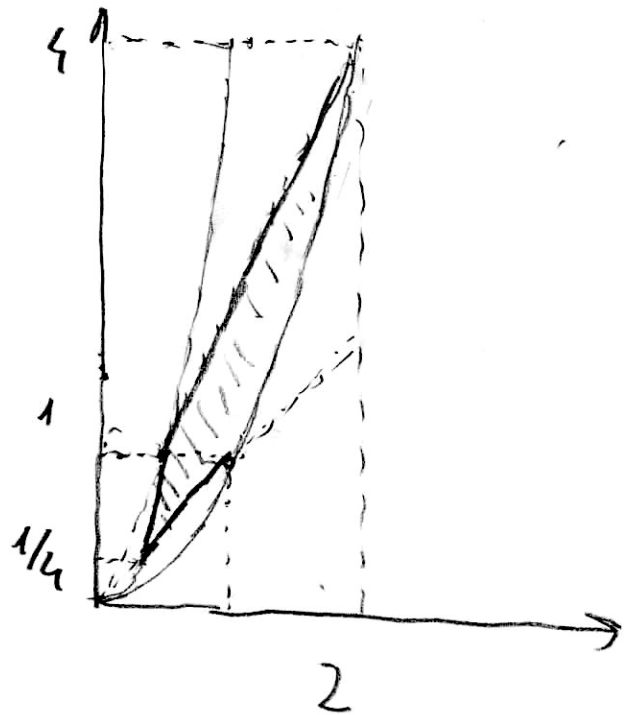
L'esercizio può anche essere svolto senza cambi di coordinate:

$$\sqrt{y} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow y = 4$$

$$\sqrt{y} = y \Leftrightarrow y = 1$$

$$\frac{\sqrt{y}}{2} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow y = 1$$

$$\frac{\sqrt{y}}{2} = y \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}$$



$$\int_{1/4}^1 \int_{\sqrt{y}/2}^y \frac{1}{y^2} dx dy + \int_1^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} \frac{1}{y^2} dx dy$$

$$= \int_{1/4}^1 \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^{3/2}} \right) dy + \int_1^4 \left( \frac{1}{y^{3/2}} - \frac{1}{2y} \right) dy$$

$$\left( \log y + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \Big|_{1/4}^1 + \left( -\frac{2}{\sqrt{y}} - \frac{1}{2} \log y \right) \Big|_1^4$$

$$1 - \log \frac{1}{4} - 2 - 1 - \frac{1}{2} \log 4 + 2 = \frac{1}{2} \log 4 = \log 2$$

(3) Sia  $\Sigma^+$  la superficie ottenuta ruotando il grafico della funzione  $y(x) = x^3$ ,  $x \in [0, 1]$ , di un angolo  $2\pi$  attorno all'asse  $x$ , orientata in modo tale che  $\mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{e}_1 < 0$ .

a) Calcolare l'area di  $\Sigma$ .

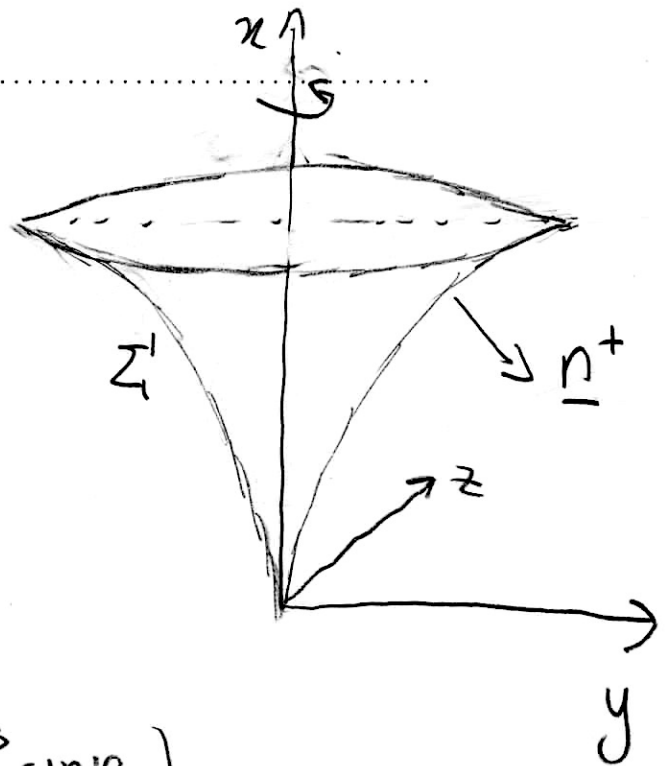
b) Calcolare il flusso del campo vettoriale  $\mathbf{V} = (1, -z, y)$  attraverso  $\Sigma^+$ .

punti: 4+2

Risposta: a)  $\frac{\pi}{27} (10^{3/2} - 1)$

b)  $-\pi$

Svolgimento:



a)

$$\sigma(x, \varphi) = (x, x^3 \cos \varphi, x^3 \sin \varphi)$$

$$\sigma_x = (1, 3x^2 \cos \varphi, 3x^2 \sin \varphi)$$

$$\sigma_\varphi = (0, -x^3 \sin \varphi, x^3 \cos \varphi)$$

$$\sigma_x \wedge \sigma_\varphi = (3x^5, -x^3 \cos \varphi, -x^3 \sin \varphi)$$

$$\|\sigma_x \wedge \sigma_\varphi\| = \sqrt{9x^{10} + x^6}$$

$$|\Sigma'| = \iint_{\Sigma'} 1 \, dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{9x^{10} + x^6} \, d\varphi \, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} \, dx = 2\pi \left(1 + 9x^4\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9 \cdot 4} \Big|_0^1$$

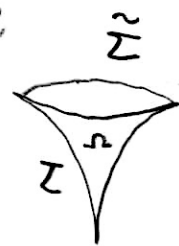
$$= \frac{\pi}{27} (10^{3/2} - 1)$$

$$b) \quad \underline{n}^+ = \frac{(-3x^5, x^3 \cos \varphi, x^3 \sin \varphi)}{\sqrt{x^6 + 9x^{10}}}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \underline{v} \cdot \underline{n}^+ dS &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1, -x^3 \sin \varphi, x^3 \cos \varphi) \cdot (-3x^5, x^3 \cos \varphi, x^3 \sin \varphi) d\varphi dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} -3x^5 d\varphi dx \\ &= -2\pi \cdot \frac{3}{6} x^6 \Big|_0^1 = -\pi. \end{aligned}$$

In alternativa, detto  $\tilde{\Sigma}$  il "tappo circolare" e  $\Omega$  l'"interno" della superficie, si ottiene

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \underline{v} \cdot \underline{n}^+ dS &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \underline{v} - \iint_{\tilde{\Sigma}} \underline{v} \cdot \underline{n}^+ dS' \\ &= 0 - \iint_{\tilde{\Sigma}} (1, -z, y) \cdot (1, 0, 0) dS \\ &= -|\Sigma| = -\pi. \end{aligned}$$



- (4) Determinare tutte le funzioni  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  per le quali il campo vettoriale  $V : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definito da

$$V(x, y) = (6yf(x), x^2 f'(x))$$

risulta irrotazionale (quindi conservativo) in  $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ , e determinarne le funzioni potenziale.

6 punti

Risposta:

$$f(x) = Ax^2 + \frac{B}{x^3}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

$$U(x, y) = \left(2Ax^3 - \frac{3B}{x^2}\right)y + C$$

Svolgimento:

$$\underline{V} \text{ irrotazionale} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y} (6yF(x)) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 F'(x))$$

$$\Leftrightarrow 6F(x) = x^2 F''(x) + 2x F'(x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 f'' + 2x f' - 6f = 0$$

Equazione di Eulero :

$$x \frac{d}{dx} = \frac{d}{ds}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ds}{dx} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow s = \log x$$

$$\frac{d^2 f}{ds^2} + \frac{df}{ds} - 6f = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$f(s) = Ae^{2s} + Be^{-3s}$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

$$f(x) = Ax^2 + \frac{B}{x^3}$$

$$\underline{V}(x, y) = \left( 6y \left( Ax^2 + \frac{B}{x^3} \right), 2Ax^3 - \frac{3B}{x^2} \right)$$

$$U(x, y) = \int \left( 2Ax^3 - \frac{3B}{x^2} \right) dy$$

$$= \left( 2Ax^3 - \frac{3B}{x^2} \right) y + C$$



(5) Rispondere alle domande che saranno distribuite durante il compito.

8 punti

Svolgimento:

---

---

- 1) Enunciare e dimostrare il teorema di Peano (al secondo ordine) per funzioni di più variabili.
  - 2)
    - a) Esibire una forma differenziale  $\omega$  che sia chiusa, ma non esatta, nel suo dominio di definizione  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ .
    - b) Mostrare che tale  $\omega$  non è esatta in  $D$ .
    - c) Mostrare che tale  $\omega$  è chiusa in  $D$ .
    - d) Mostrare che tale  $\omega$  è esatta in un sottoinsieme semplicemente connesso di  $D$ .
-