

Esercizio 1. Data la curva c di equazioni parametriche

$$x = \frac{t^3}{3}, \quad y = \frac{t^2}{2} - t, \quad z = \frac{t^4}{4} - t^2, \quad t \in \mathbb{R}$$

- (a) scrivere equazioni parametriche del cono di vertice $V \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e direttrice c ;
- (b) determinare il triedro fondamentale nell'origine O ;
- (c) calcolare la curvatura e la torsione di c nel suo punto generico e dedurre se c è piana o sghemba.

Esercizio 2. Data la superficie S di equazioni parametriche

$$x = u^2 + 2v, \quad y = u^3 - v, \quad z = u^4$$

- (a) verificare che S è un cilindro regolare per $u \neq 0$;
- (b) determinare il piano tangente e il vettore normale nel punto $P_0 \equiv \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;
- (c) calcolare le curvature principali, gaussiana e media di S nel suo punto generico.

Esercizio 3. Dare la definizione di curva regolare c nel piano, di asse curvilinea e di curvatura. Dimostrare che se c è regolare la si può riparametrizzare con l'asse curvilinea.

Esercizio 4. Dare la definizione di campo di vettori C^∞ e di derivazione covariante su una superficie S . Scrivere (senza dimostrazione) le equazioni delle geodetiche di S e dimostrare che esse si possono interpretare come curve di accelerazione nulla.