CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2014-2015
PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE DEL 14-01-15
Corso del Prof. Manlio BORDONI

Esercizio 1 . Sia c la curva di equazioni parametriche

$$x = \log t \quad , \quad y = \frac{t^2}{2} \quad , \quad z = t \quad , \qquad t > 0.$$

(a) Verificare che c è regolare.
(b) Calcolare curvatura e torsione di c nel suo punto generico e dedurne se c è piana o sghemba.
(c) Determinare il triedro di Frenet nel punto P_0 di c corrispondente al valore t_0=1 del parametro.
(d) Determinare centro, raggio ed equazioni cartesiane del cerchio osculatore a c in P_0.

Soluzione

(a) La biunivocità della corrispondenza fra punti della curva e valori del paramento è assicurata dalla terza equazione. Le funzioni sono di classe C^ω e le derivate prime

$$x' = \frac{1}{t} \quad , \quad y' = t \quad , \quad z' = 1$$

non sono mai contemporaneamente nulle.
(b) Il vettore $\mathbf{c}'(t) \equiv (\frac{1}{t}\,,\, t\,,\, 1)$ ha lunghezza $\|\mathbf{c}'(t)\| = \frac{\sqrt{t^4+t^2+1}}{t}$. Le derivate seconde sono

$$x'' = -\frac{1}{t^2} \quad , \quad y'' = 1 \quad , \quad z'' = 0$$

e risulta $\mathbf{c}'(t) \wedge \mathbf{c}''(t) \equiv (-1\,,\, -\frac{1}{t^2}\,,\, \frac{2}{t})$ con lunghezza $\|\mathbf{c}'(t) \wedge \mathbf{c}''(t)\| = \frac{\sqrt{t^4+4t^2+1}}{t^2}$, quindi la curvatura vale

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{c}'(t) \wedge \mathbf{c}''(t)\|}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3} = \frac{t\sqrt{t^4+4t^2+1}}{\sqrt{(t^4+t^2+1)^3}} \ .$$

Le derivate terze sono

$$x''' = \frac{2}{t^3} \quad , \quad y''' = 0 \quad , \quad z''' = 0$$

e quindi la formula della torsione dà

$$\tau(t) = \frac{2t}{t^4 + 4t^2 + 1} \ .$$

La curva è sghemba in quanto la torsione non è identicamente nulla.
(c) Per $t_0 = 1$ si ha il punto $P_0 \equiv (0\,,\,\frac{1}{2}\,,\,1)$ e il vettore tangente $\mathbf{c}_0' \equiv (1\,,\,1\,,\,1)$ dà il versore $\mathbf{t}_0 \equiv (\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\,\frac{1}{\sqrt{3}})$. Il versore binormale è $\mathbf{b}_0 = \frac{\mathbf{c}_0' \wedge \mathbf{c}_0''}{\|\mathbf{c}_0' \wedge \mathbf{c}_0''\|} \equiv (-\frac{1}{\sqrt{6}}\,,\,-\frac{1}{\sqrt{6}}\,,\,\frac{2}{\sqrt{6}})$. Infine il versore normale principale è $\mathbf{n}_0 = \mathbf{b}_0 \wedge \mathbf{t}_0 \equiv (-\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,0)$.
(d) La curvatura per $t_0 = 1$ vale $k_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}$ e il raggio di curvatura è uguale al suo inverso $R_0 = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Il centro del cerchio osculatore è il punto $C = P_0 + \frac{1}{k_0}\mathbf{n}_0 \equiv (-\frac{3}{2}\,,\,2\,,\,1)$. Il cerchio osculatore si ottiene intersecando la sfera di centro C e raggio R_0 con il piano osculatore a c in P_0 e quindi sue equazioni cartesiane sono

$$\begin{cases} (x + \frac{3}{2})^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = \frac{9}{2} \\ x + y - 2z + \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \ .$$

Esercizio 2 . Sia $\mathcal{E}$ l'elicoide di equazioni parametriche

$$x = rv\cos u \quad , \quad y = rv\sin u \quad , \quad z = hu \quad , \qquad u \in \mathbb{R},\ v \neq 0.$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{E}$ è regolare.
(b) Determinare il piano tangente ad $\mathcal{E}$ nel suo punto generico.
(c) Determinare l'espressione dell'applicazione di Gauss $\mathcal{G} : \mathcal{E} \longrightarrow S^2$.
(d) Calcolare i coefficienti della I e II forma quadratica fondamentale di $\mathcal{E}$.
(e) Calcolare le curvature gaussiana e media di $\mathcal{E}$ e stabilire quali punti sono ellittici, parabolici, iperbolici.
(f) Calcolare le curvature principali di $\mathcal{E}$.

Soluzione

(a) Se $(u', v') \neq (u, v)$ sono due coppie distinte di parametri ed è $u' \neq u$, i corrispondenti punti di coordinate (x', y', z') e (x, y, z) sono distinti essendo $z' = hu' \neq hu = z$. Se invece è $u' = u$ (dunque $z' = z$) e quindi $v' \neq v$

i punti corrispondenti sono anche distinti in quanto se fosse $x' = x$ cioè $rv' \cos u = rv \cos u$ sarebbe $v' = v$ contro l'ipotesi, a meno che non sia $\cos u = 0$ ovvero $u = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$: ma allora sarebbe $\sin u = \pm 1 \neq 0$ e di conseguenza $y' = rv' \sin u = rv \sin u = y$ comporterebbe di nuovo $v' = v$. Lo stesso argomento vale, *mutatis mutandis*, se fosse $y' = y$. Viceversa, se $(x', y', z') \neq (x, y, z)$ e $z' \neq z$ ossia $u' \neq u$, ai due punti corrispondono coppie diverse di parametri, mentre se $z' = z$ e dunque $u' = u$, risulterà $x' = rv' \cos u \neq rv \cos u = x$, quindi $v' \neq v$, a meno che non sia $\cos u = 0$ cioè $u = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ nel qual caso risulterebbe $y' = \pm 1 rv' \neq \pm 1 rv$ da cui seguirebbe $v' \neq v$; analogamente se $y' \neq y$. In definitiva le equazioni date pongono una corrispondenza biunivoca tra le coppie di parametri e i punti della superficie. Le funzioni che compaiono sono tutte differenziabili e risulta

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -rv \sin u & r \cos u \\ rv \cos u & r \sin u \\ h & 0 \end{pmatrix} = 2$$

in quanto ad esempio si ha $\det\begin{pmatrix} -rv \sin u & r \cos u \\ rv \cos u & r \sin u \end{pmatrix} = -r^2 v \neq 0$ essendo $v \neq 0$.

(b) Il piano tangente all'elicoide nel suo punto generico ha equazione

$$\det\begin{pmatrix} x - rv \cos u & -rv \sin u & r \cos u \\ y - rv \sin u & rv \cos u & r \sin u \\ z - hu & h & 0 \end{pmatrix} = 0$$

ossia, svolti i calcoli:

$$(h \sin u)x - (h \cos u)y + (rv)z - hruv = 0\,.$$

(c) Risulta

$$\overrightarrow{P_u} \wedge \overrightarrow{P_v} \equiv \begin{pmatrix} -hr \sin u \\ hr \cos u \\ -r^2 v \end{pmatrix} \quad , \quad \|\overrightarrow{P_u} \wedge \overrightarrow{P_v}\| = r\sqrt{h^2 + r^2 v^2}$$

da cui si ricava il versore normale $\boldsymbol{\nu} = \frac{\overrightarrow{P_u} \wedge \overrightarrow{P_v}}{\|\overrightarrow{P_u} \wedge \overrightarrow{P_v}\|} \equiv \begin{pmatrix} \frac{-h \sin u}{\sqrt{h^2+r^2v^2}} \\ \frac{h \cos u}{\sqrt{h^2+r^2v^2}} \\ \frac{-rv}{\sqrt{h^2+r^2v^2}} \end{pmatrix}$. L'applicazione di Gauss $\mathcal{G}$ associa al punto $P(u, v) \in S$ il secondo estremo del versore $\boldsymbol{\nu}(u, v)$ applicato nell'origine, che $\in S^2$.

(d) I coefficienti della I Forma Quadratica Fondamentale sono

$$E = h^2 + r^2 v^2 \quad , \quad F = 0 \quad , \quad r^2$$

e danno $EG - F^2 = r^2(h^2 + r^2 v^2)$.

Si hanno poi i vettori

$$\overrightarrow{P_{uu}} \equiv \begin{pmatrix} -rv\cos u \\ -rv\sin u \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{P_{uv}} \equiv \begin{pmatrix} -r\sin u \\ r\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{P_{vv}} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e quindi i coefficienti della II Forma Quadratica Fondamentale valgono

$$\mathcal{L} = 0 \quad , \quad \mathcal{M} = \frac{hr}{\sqrt{h^2 + r^2 v^2}} \quad , \quad \mathcal{N} = 0\,.$$

(e) La curvatura gaussiana vale $k = -\frac{h^2}{(h^2+r^2v^2)^2}$ ed essendo sempre negativa tutti i punti sono iperbolici. La curvatura media vale $H = 0$ sicché l'elicoide è una superficie minima.

(f) Poiché $k_1 + k_2 = 2H = 0$, deve essere $k_2 = -k_1$ e allora da $k_1 \cdot k_2 = k$ si ricava $k_1^2 = -k$, quindi le curvature principali valgono $\pm\frac{h}{h^2+r^2v^2}$.

Esercizio 3 . Sia $S(u, v)$ una superficie di classe $C^k,\ k \geq 2$ per $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Dare la definizione di piano tangente a S in un suo punto e dimostrare qual è la sua equazione.

(b) Dimostrare le formule che esprimono i coefficienti della Seconda Forma Quadratica Fondamentale.

(c) Dare la definizione precisa di curvatura gaussiana e dimostrare la formula che la esprime in termini dei coefficienti della Prima e Seconda Forma Quadratica Fondamentale.

Soluzione

(a) Vedere appunti del corso, pp. 119-121.

(b) Vedere appunti del corso, pp. 137-138.

(c) Vedere appunti del corso, pp. 152-155.