V - Esercizi

Esercizio 1 . Determinare una base ortonormale $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ di $\mathbb{R}^3$ sapendo che: $\mathbf{v}_1 = {}^t\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, che $\mathbf{v}_2$ appartiene al sottospazio $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ e che l'angolo di $\mathbf{v}_2$ ed $\mathbf{e}_1 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è acuto.

Esercizio 2 . Determinare la 3^a colonna in modo che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & * \\ 1/\sqrt{3} & 0 & ** \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & *** \end{pmatrix}$$

sia ortogonale.

Esercizio 3 . Determinare, se possible, α e $\beta \in \mathbb{R}$ in modo che la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{6} & 0 & \beta \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \end{pmatrix}$$

sia ortogonale.

Esercizio 4 . Dato il vettore $\mathbf{x} = {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ determinare due vettori $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ tali che $\mathbf{x}_1 \in W$, ove $W = L_{\mathbb{R}}\left\{ {}^t\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathbf{x}_2 \in W^{\perp}$ e $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$.

Esercizio 5 . Dati i vettori $\mathbf{u} = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = {}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ determinare i vettori ortogonali a $\mathbf{w}$ e la cui proiezione ortogonale sul sottospazio generato da $\mathbf{u}$ sia $(-1/5)\mathbf{u}$.

Esercizio 6 . Determinare una base ortonormale $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ sapendo che $\mathbf{u}_1$ appartiene al sottospazio $W_1 = L_{\mathbb{R}}\left\{ {}^t\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$ e che $\mathbf{u}_2$ appartiene al sottospazio $W_2 = L_{\mathbb{R}}\left\{ {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 7 . Verificare che se due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ verificano l'uguaglianza $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$ allora $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ è ortogonale a $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ e viceversa.

Esercizio 8 . Calcolare la matrice $A_{(2)}$ che rappresenta nella base canonica l'operatore $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ avente autovettori $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ associati rispettivamente agli autovalori 0,2.

Esercizio 9 . Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare gli autovalori e gli autospazi di T.

(b) Dire se T è diagonalizzabile o no, giustificando la risposta.

Esercizio 10 . Trovare gli autovalori ed una base ortonormale di autovettori dell'operatore simmetrico $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ rappresentato nella base canonica dalla matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e determinare due diverse matrici ortogonali diagonalizzanti A.

Esercizio 11 . Sia $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore tale che:

$$G\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; , \; G\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Scrivere la matrice e le equazioni di G nella base canonica.
- Determinare la controimmagine del vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e stabilire se essa è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
- Stabilire se G è diagonalizzabile.

Esercizio 12 . Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore definito da

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 2x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

- Trovare gli autovalori di F.
- Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di F.