CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA MECCANICA
PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE DEL 19-12-2005
CORSO DEL PROF. MANLIO BORDONI – A.A. 2005-2006

Esercizio 1. Nello spazio è data la curva c di equazioni parametriche

$$x = t \quad , \; y = \frac{1+t}{t} \quad , \; z = \frac{1-t^2}{t} \qquad (t \neq 0).$$

(a) Determinare le equazioni cartesiane della retta tangente a c.
(b) Calcolare la curvatura di c.
(c) Calcolare la torsione di c e dedurne che c è piana.
(d) Determinare l'equazione cartesiana del piano contenente c.
(e) Determinare la base mobile su c.

Soluzione

(a) Risulta $x'(t) = 1, y'(t) = -\frac{1}{t^2}, z'(t) = -\frac{t^2+1}{t^2}$ ed equazioni della tangente si ottengono imponendo che sia $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} x-t & 1 \\ y-\frac{1+t}{t} & -\frac{1}{t^2} \\ z-\frac{1-t^2}{t} & -\frac{t^2+1}{t^2} \end{pmatrix} = 1$, sono dunque

$$x + t^2 y - t^2 - 2t = 0 \quad , \quad (t^2+1)x + t^2 z - 2t = 0.$$

(b) Risulta $x''(t) = 0, y''(t) = \frac{2}{t^3}, z''(t) = \frac{2}{t^3}$ e quindi il vettore $\mathbf{c}'(t) \wedge \mathbf{c}''(t)$ ha coordinate $\begin{pmatrix} \frac{2}{t^3} \\ -\frac{2}{t^3} \\ \frac{2}{t^3} \end{pmatrix}$ e modulo uguale a $\frac{2\sqrt{3}}{t^3}$. Si ha pertanto

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{c}' \wedge \mathbf{c}''\|}{\|\mathbf{c}'\|^3} = \frac{t^3\sqrt{3}}{\sqrt{2(t^4+t^2+1)^3}}.$$

(c) Risulta $x'''(t) = 0, y'''(t) = z'''(t) = -\frac{6}{t^4}$ e quindi $\langle \mathbf{c}' \wedge \mathbf{c}'', \mathbf{c}''' \rangle = 0$. Pertanto risulta $\tau(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ ossia la curva è piana.
(d) Il piano contenente la curva è il piano osculatore alla curva stessa in un suo qualsiasi punto e la sua equazione è

$$\det\begin{pmatrix} x-t & 1 & 0 \\ y-\frac{1+t}{t} & -\frac{1}{t^2} & \frac{2}{t^3} \\ z-\frac{1-t^2}{t} & -\frac{t^2+1}{t^2} & \frac{2}{t^3} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{cioè} \quad x - y + z - 1 = 0.$$

(e) Il versore tangente è $\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|} = \frac{t^2}{\sqrt{2(t^4+t^2+1)}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{t^2} \\ -\frac{t^2+1}{t^2} \end{pmatrix}$. Si ha poi il versore binormale $\mathbf{b}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)\wedge\mathbf{c}''(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\wedge\mathbf{c}''(t)\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ ed infine il versore normale principale

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \wedge \mathbf{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{6(t^4+t^2+1)}}\begin{pmatrix} t^2+2 \\ 2t^2+1 \\ t^2-1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Nello spazio è data la superficie S di equazioni parametriche

$$x = e^u \cos v \quad , \; y = e^u \sin v \quad , \; z = u.$$

(a) Verificare che S è una superficie di rotazione intorno all'asse z.
(b) Determinare l'equazione del piano tangente e del versore normale ad S nel punto P_0 corrispondente ai valori $u = 0, v = 0$ dei parametri.
(c) Calcolare i coefficienti della I e II forma quadratica fondamentale di S.
(d) Calcolare le curvature principali, gaussiana e media di S.
(e) Calcolare l'area della parte $\mathcal{D}$ di S corrispondente a $0 \leq u \leq \log 3$, $0 \leq v \leq \pi$.

Soluzione

(a) S è di rotazione intorno all'asse z in quanto intersecando con i piani $z = k$ costante si hanno circonferenze con centro sull'asse z e di raggio e^k.
(b) Risulta $x_u = e^u \cos v, y_v = e^u \sin v, z_u = 1$ e $x_v = -e^u \sin v, y_v = e^u \cos v, z_v = 0$ e quindi $\overrightarrow{P}_u \wedge \overrightarrow{P}_v$ ha coordinate $\begin{pmatrix} -e^u \cos v \\ -e^u \sin v \\ e^{2u} \end{pmatrix}$. Calcolando in P_0, si ha che il piano tangente ha equazione $x - z - 1 = 0$ ed il versore normale ha coordinate $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.
(c) La I F.Q.F. ha coefficienti $E = e^{2u} + 1, F = 0, G = e^{2u}$ e si ha $EG - F^2 = e^{2u}(e^{2u} + 1)$. Risulta poi $x_{uu} = e^u \cos v, y_{uu} = e^u \sin v, z_{uu} = 0$; $x_{uv} = -e^u \sin v, y_{uv} = e^u \cos v, z_{uv} = 0$; $x_{vv} = -e^u \cos v, y_{vv} = -e^u \sin v, z_{vv} = 0$. Pertanto i coefficienti della II F.Q.F. valgono $\mathcal{L} = -\frac{e^u}{\sqrt{e^{2u}+1}}, \mathcal{M} = 0, \mathcal{N} = \frac{e^u}{\sqrt{e^{2u}+1}}$.
(d) La curvatura gaussiana vale $K = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG-F^2} = -\frac{1}{(e^{2u}+1)^2}$. L'inversa della matrice $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ è $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{e^{2u}+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{e^{2u}} \end{pmatrix}$. La matrice dell'operatore di Weingarten è allora $\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{e^u}{\sqrt{(e^{2u}+1)^3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{e^u \sqrt{e^{2u}+1}} \end{pmatrix}$. Poiché tale matrice è già diagonale, gli autovalori dell'operatore di Weingarten, cioè le curvature principali, sono gli elementi della diagonale principale; la curvatura media è la loro semisomma, ossia $H = \frac{1}{2e^u \sqrt{(e^{2u}+1)^3}}$.
(e) $\iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{EG - F^2} du\, dv$

Esercizio 3. Dare la definizione di piano osculatore α ad una curva c di equazioni parametriche

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$

in un suo punto $P_0 = P(t_0)$. Scrivere e dimostrare qual è l'equazione cartesiana di α.

Soluzione

α è il piano limite, se esiste, contenente P_0, la retta tangente in P_0 a c ed un altro punto $P = P(t) \in c$ quando P tende a P_0, cioè quando t tende a t_0. Se la curva è di classe C^2, tale posizione esiste. Infatti il piano suddetto ha equazione

$$\det \begin{pmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) & x(t) - x(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) & y(t) - y(t_0) \\ z - z(t_0) & z'(t_0) & z(t) - z(t_0) \end{pmatrix} = 0.$$

Lo sviluppo di Taylor dà $x(t) - x(t_0) = x'(t_0)(t - t_0) + \frac{x''(t_0)}{2}(t - t_0)^2 + o^3(t - t_0)$, ove $o^3(t - t_0)$ indica un infinitesimo di ordine ≥ 3 rispetto a $t - t_0$, ed espressioni analoghe per le altre differenze. Sostituendo nel determinante precedentemente scritto, sfruttando le proprietà elementari dei determinanti, dividendo per $(t - t_0)^2$ (che è $\neq 0$) ed infine passando al limite, si ha che α esiste ed ha equazione

$$\det \begin{pmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) & x''(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) & y''(t_0) \\ z - z(t_0) & z'(t_0) & z''(t_0) \end{pmatrix} = 0.$$