CURVE PIANE

- Equazioni parametriche: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$
- Equazione cartesiana: $f(x, y) = 0$
- Grafico: $y = \varphi(x)$ oppure $x = \psi(y)$
- Retta tangente in $P_0 \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow t_0$:

$$\det \begin{pmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) = 0$$

$$y - y_0 = \varphi'(x_0)(x - x_0)$$

- Vettore tangente: $\mathbf{t}(t) = \mathbf{c}'(t) \equiv \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f_y \\ -f_x \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi' \end{pmatrix}$ ove $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$
- Ascissa curvilinea: $s'(t) = \|\mathbf{t}(t)\| = \|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$,

$$s(t) = \int \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

- Lunghezza di una curva c: $L_b^a(c) = s(b) - s(a) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$

Curva $c = c(s)$ parametrizzata dall'ascissa curvilinea

- Versore tangente: $\mathbf{t}(s) = \mathbf{c}'(s) \equiv \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$
- Vettore normale: $\mathbf{t}'(s) = \mathbf{c}''(s) \equiv \begin{pmatrix} x''(s) \\ y''(s) \end{pmatrix}$; versore normale:

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\mathbf{t}'(s)\|} = \frac{\mathbf{c}''(s)}{\|\mathbf{c}''(s)\|} \equiv \begin{pmatrix} -y'(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x''(s)}{\sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2}} \\ \frac{y''(s)}{\sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2}} \end{pmatrix}$$

- Curvatura

$$k(s) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{c}'(s) & \mathbf{c}''(s) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x'(s) & x''(s) \\ y'(s) & y''(s) \end{pmatrix} = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)$$

- Formule di Frenet:

$$\mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s) \quad , \quad \mathbf{n}'(s) = -k(s)\mathbf{t}(s)$$

in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}'(s) & \mathbf{n}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) & \mathbf{n}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -k(s) \\ k(s) & 0 \end{pmatrix}$$

- Cerchio osculatore: centro $C(s) = c(s) + \frac{1}{k(s)}\mathbf{n}(s)$, raggio $\frac{1}{|k(s)|}$
- Formule da ricordare:

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{c}''(s)}{k(s)} = \frac{\mathbf{t}'(s)}{k(s)} \ , \ |k(s)| = \|\mathbf{t}'(s)\| = \|\mathbf{c}''(s)\| = \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2}$$

Curva $c = c(t)$ con parametro qualsiasi

- Versore tangente: $\mathbf{t}(t) \equiv \begin{pmatrix} \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}} \\ \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}} \end{pmatrix}$
- Curvatura: $k(t) = \frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{\sqrt{(x'(t)^2+y'(t)^2)^3}}$; $k(x) = \frac{\varphi''(x)}{\sqrt{(1+\varphi'(x)^2)^3}}$ se $c : y = \varphi(x)$
- Versore normale: $\mathbf{n}(t) \equiv \begin{pmatrix} -\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}} \\ \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}} \end{pmatrix}$

CURVE NELLO SPAZIO

- Equazioni parametriche: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$
- Equazioni cartesiane: $\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$
- Retta tangente in $P_0 \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow t_0$: $\mathrm{rg} \begin{pmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \\ z - z(t_0) & z'(t_0) \end{pmatrix} = 1$,

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0 \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0 \end{cases}$$

- Vettore tangente: $\mathbf{t}(t) = \mathbf{c}'(t) \equiv \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$
- Piano osculatore: $\det \begin{pmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) & x''(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) & y''(t_0) \\ z - z(t_0) & z'(t_0) & z''(t_0) \end{pmatrix} = 0$
- Ascissa curvilinea: $s'(t) = \|\mathbf{t}(t)\| = \|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$,

$$s(t) = \int \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$$

- Lunghezza di una curva c: $L_b^a(c) = s(b) - s(a) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$

Curva $c = c(s)$ parametrizzata dall'ascissa curvilinea

- Versore tangente: $\mathbf{t}(s) = \mathbf{c}'(s) \equiv \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \\ z'(s) \end{pmatrix}$
- Vettore normale: $\mathbf{t}'(s) = \mathbf{c}''(s) \equiv \begin{pmatrix} x''(s) \\ y''(s) \\ z''(s) \end{pmatrix}$
- Curvatura: $k(s) = \|\mathbf{t}'(s)\| = \|\mathbf{c}''(s)\| = \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2}$
- Versore normale principale: $\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\mathbf{t}'(s)\|} = \frac{\mathbf{c}''(s)}{k(s)}$
- Versore binormale: $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$
- Torsione $\tau(s) = -\frac{1}{k(s)^2} \det \begin{pmatrix} x'(s) & x''(s) & x'''(s) \\ y'(s) & y''(s) & y'''(s) \\ z'(s) & z''(s) & z'''(s) \end{pmatrix}$
- Formule di Frenet:

$$\mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s)\ ,\ \mathbf{n}'(s) = -k(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s)\ ,\ \mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$$

in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}'(s) & \mathbf{n}'(s) & \mathbf{b}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) & \mathbf{n}(s) & \mathbf{b}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

- Cerchio osculatore: intersezione del piano osculatore con la sfera di centro $C(s) = c(s) + \frac{1}{k(s)}\mathbf{n}(s)$ e raggio $\frac{1}{k(s)}$

Curva $\gamma = \gamma(t)$ parametrizzata da un parametro qualsiasi

- Versore tangente:

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\boldsymbol{\gamma}'(t)}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|} \equiv \left(\begin{array}{c} \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}} \\ \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}} \\ \frac{z'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}} \end{array} \right)$$

- Curvatura:

$$k(t) = \frac{\|\boldsymbol{\gamma}'(t) \wedge \boldsymbol{\gamma}''(t)\|}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|^3}$$

- Torsione:

$$\tau(t) = -\frac{1}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t) \wedge \boldsymbol{\gamma}''(t)\|^2} \det \left(\begin{array}{ccc} x'(t) & x''(t) & x'''(t) \\ y'(t) & y''(t) & y'''(t) \\ z'(t) & z''(t) & z'''(t) \end{array} \right)$$

- Versore binormale:

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\boldsymbol{\gamma}'(t) \wedge \boldsymbol{\gamma}''(t)}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t) \wedge \boldsymbol{\gamma}''(t)\|}$$

- Versore normale principale: $\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \wedge \mathbf{t}(t)$
- Cerchio osculatore: intersezione del piano osculatore con la sfera di centro $C(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k(t)}\mathbf{n}(t)$ e raggio $\frac{1}{k(t)}$

SUPERFICI

- Equazioni parametriche: $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$
- Equazione cartesiana: $f(x,y,z) = 0$, come grafico $z = \varphi(x,y)$
- Piano tangente in $P_0 \equiv \left(\begin{array}{c} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{array} \right) \longleftrightarrow (u_0, v_0)$:

$$\det \left(\begin{array}{ccc} x - x_0 & x_u^0 & x_v^0 \\ y - y_0 & y_u^0 & y_v^0 \\ z - z_0 & z_u^0 & z_v^0 \end{array} \right) = 0$$

$f_x^0(x-x_0)+f_y^0(y-y_0)+f_z^0(z-z_0)=0$ oppure $z-z_0=\varphi_x^0(x-x_0)+\varphi_y^0(y-y_0)$

- I FQF: $\overrightarrow{P_u} \equiv \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{P_v} \equiv \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$,

$$
\begin{aligned}
E &= \langle \overrightarrow{P_u}, \overrightarrow{P_u} \rangle = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = 1 + \varphi_x^2 \\
F &= \langle \overrightarrow{P_u}, \overrightarrow{P_v} \rangle = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = \varphi_x \varphi_y \\
G &= \langle \overrightarrow{P_v}, \overrightarrow{P_v} \rangle = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = 1 + \varphi_y^2
\end{aligned}
$$

risulta $EG-F^2>0$ e $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$

- Ascissa curvilinea di una curva $x = x(u(t), v(t)), \ldots$ tracciata sulla superficie:

$$s'(t)^2 = Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2$$

- Angolo fra due curve di vettori tangenti $a\overrightarrow{P_u} + b\overrightarrow{P_v}, c\overrightarrow{P_u} + d\overrightarrow{P_v}$:

$$\cos\theta = \frac{Eac + F(ad+bc) + Gbd}{\sqrt{(Ea^2 + 2Fab + Gb^2)\cdot(Ec^2 + 2Fcd + Gd^2)}}$$

- Area del parallelogramma $\mathcal{A}(\overrightarrow{P_u}, \overrightarrow{P_v}) = \sqrt{EG-F^2}$
- Area di una regione piana $\mathcal{A}(R) = \iint_R \sqrt{EG-F^2}\,dudv$
- Versore normale $\nu = \frac{\overrightarrow{P_u} \wedge \overrightarrow{P_v}}{||\overrightarrow{P_u} \wedge \overrightarrow{P_v}||}$
- Operatore di Weingarten $L(X) = -\nabla_X \nu$
- II FQF:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \det \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_{uu} \\ y_u & y_v & y_{uu} \\ z_u & z_v & z_{uu} \end{pmatrix} = \frac{\varphi_{xx}}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}} \\
\mathcal{M} &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \det \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_{uv} \\ y_u & y_v & y_{uv} \\ z_u & z_v & z_{uv} \end{pmatrix} = \frac{\varphi_{xy}}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}} \\
\mathcal{N} &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \det \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_{vv} \\ y_u & y_v & y_{vv} \\ z_u & z_v & z_{vv} \end{pmatrix} = \frac{\varphi_{yy}}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}}
\end{aligned}
$$

Se $\mathbf{v} = a\overrightarrow{P_u} + b\overrightarrow{P_v}, \mathbf{w} = c\overrightarrow{P_u} + d\overrightarrow{P_v}$:

$$II(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathcal{L}ac + \mathcal{M}(ad+bc) + \mathcal{N}bd$$

- Curvatura gaussiana

$$k = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2} = \frac{\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2}{(1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2)^2}$$

- Curvatura media

$$H = \frac{E\mathcal{N} + G\mathcal{L} - 2F\mathcal{M}}{2(EG - F^2)}$$

- Curvature principali: autovalori della matrice dell'operatore di Weingarten

$$\frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} \mathcal{L}G - \mathcal{M}F & -\mathcal{L}F + \mathcal{M}E \\ \mathcal{M}G - \mathcal{N}F & -\mathcal{M}F + \mathcal{N}E \end{pmatrix}$$

- Classificazione dei punti:
  ellittici se $k > 0$
  parabolici se $k = 0$
  iperbolici se $k < 0$