PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE DEL 13-01-10
Corso del Prof. M. BORDONI

Esercizio 1 . Data nello spazio la curva $c = c(t)$ di equazioni parametriche

$$x = \frac{t^2}{2} \quad , \quad y = \frac{t^3}{3} \quad , \quad z = \log t \qquad , \quad t > 0$$

(a) Verificare che c è regolare.
(b) Determinare la retta tangente ed il piano osculatore di c nel punto P_0 della curva corrispondente al valore $t_0 = 1$ del parametro.
(c) Determinare la base mobile nel punto generico di c.
(d) Calcolare la curvatura e la torsione di c nel suo punto generico e dedurne se c è piana o sghemba.
(e) Considerata poi nel piano xy la curva $\gamma = \gamma(t)$ proiezione ortogonale di c, di equazioni parametriche

$$x = \frac{t^2}{2} \quad , \quad y = \frac{t^3}{3} \quad , \quad (z = 0),$$

eliminare il parametro t in modo da ottenere un'equazione cartesiana del tipo f(x, y)=0 e determinare gli eventuali punti doppi di γ, precisandone il tipo e le tangenti principali.

SOLUZIONE

(a) La curva è regolare in quanto le sue equazioni stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra i valori del parametro t ed i punti della curva (ad esempio $t = e^z$), le funzioni sono di classeC^∞ e le derivate prime

$$x' = t, \quad y' = t^2, \quad z' = \frac{1}{t}$$

non sono mai contemporaneamente nulle per $t > 0$.
(b) Il punto P_0 ha coordinate $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0)$ e risulta $x_0' = y_0' = z_0' = 1$ sicché la retta tangente ha equazioni

$$\text{rg} \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} & 1 \\ y - \frac{1}{3} & 1 \\ z & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 2x - 2z - 1 = 0 \\ 3y - 3z - 1 = 0 \end{cases} .$$

Risulta poi

$$x'' = 1, \quad y'' = 2t, \quad z'' = -\frac{1}{t^2} \qquad \text{e} \qquad x_0'' = 1, \quad y_0'' = 2, \quad z_0'' = -1$$

per cui il piano osculatore ha equazione

$$\det\begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ y - \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ z & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{cioè} \quad 18x - 12y - 6z - 5 = 0.$$

(c) Si ha $\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{t^2 + t^4 + \frac{1}{t^2}} = \frac{1}{t}\sqrt{t^6 + t^4 + 1}$ e quindi il versore tangente è $\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|} = \frac{t}{\sqrt{t^6+t^4+1}}\mathbf{c}'(t) \equiv \begin{pmatrix} \frac{t^2}{\sqrt{t^6+t^4+1}} \\ \frac{t^3}{\sqrt{t^6+t^4+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{t^6+t^4+1}} \end{pmatrix}$. Risulta poi

$$\mathbf{c}'(t) \wedge \mathbf{c}''(t) = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & t & 1 \\ \mathbf{j} & t^2 & 2t \\ \mathbf{k} & \frac{1}{t} & -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix} = -3\mathbf{i} + \frac{2}{t}\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} \equiv \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{2}{t} \\ t^2 \end{pmatrix}$$

e $\|\mathbf{c}'(t) \wedge \mathbf{c}''(t)\| = \sqrt{9 + \frac{4}{t^2} + t^4} = \frac{1}{t}\sqrt{t^6 + 9t^2 + 4}$, pertanto il versore binormale è

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t) \wedge \mathbf{c}''(t)}{\|\mathbf{c}'(t) \wedge \mathbf{c}''(t)\|} = \frac{t}{\sqrt{t^6 + 9t^2 + 4}}\mathbf{c}'(t) \wedge \mathbf{c}''(t) \equiv \begin{pmatrix} \frac{-3t}{\sqrt{t^6+9t^4+4}} \\ \frac{2}{\sqrt{t^6+9t^4+4}} \\ \frac{t^3}{\sqrt{t^6+9t^4+4}} \end{pmatrix}.$$

Infine il versore normale principale è

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \wedge \mathbf{t}(t) \equiv \begin{pmatrix} \frac{2-t^6}{\sqrt{(t^6+9t^4+4)(t^6+t^4+1)}} \\ \frac{t^5+3t}{\sqrt{(t^6+9t^4+4)(t^6+t^4+1)}} \\ \frac{-3t^4-2t^2}{\sqrt{(t^6+9t^4+4)(t^6+t^4+1)}} \end{pmatrix}.$$

(d) La curvatura di c è $k(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)\wedge\mathbf{c}''(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3} = t^2\sqrt{\frac{t^6+9t^2+4}{(t^6+t^4+1)^3}}$. Per il calcolo della torsione occorrono le derivate terze: $x''' = 0$, $y''' = 2$, $z''' = \frac{2}{t^3}$ e la torsione è $\tau(t) = -\frac{1}{\|\mathbf{c}'(t)\wedge\mathbf{c}''(t)\|^2} \cdot \det\left(\mathbf{c}'(t)\ \mathbf{c}''(t)\ \mathbf{c}'''(t)\right) = -\frac{6t}{t^6+9t^2+4}$. Poiché la torsione non è identicamente nulla, la curva è sghemba.

(e) Elevando x al cubo ed y al quadrato si ha $x^3 = \frac{t^6}{8}$ e $y^2 = \frac{t^6}{9}$ da cui si ricava $t^6 = 8x^3 = 9y^2$ e quindi l'equazione cartesiana di γ: $f(x,y) = 8x^3 - 9y^2 = 0$. Le derivate parziali prime $f_x = 24x^2$, $f_y = -18y$ si annullano nell'origine, che appartiene a γ ed è dunque un suo punto singolare. Le derivate seconde $f_{xx} = 48x$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = -18$ non sono in O tutte nulle, per cui l'origine è un punto doppio; l'hessiano in O vale 0, quindi si tratta di una cuspide le cui tangenti principali sono date da $f^0_{xx}(x-x_0)^2 + 2f^0_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + f^0_{yy}(y-y_0)^2 = 0$ cioè $-18y^2 = 0$ ossia l'asse x contato due volte.

Esercizio 2 . Sia S la superficie di equazioni parametriche

$$x = u\cos v \quad , \quad y = u\sin v \quad , \quad z = uv \qquad , \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$

(a) Verificare che S è regolare e calcolare l'equazione del piano tangente ad S nel suo punto $P_0 \equiv (1,0,0)$.
(b) Calcolare i coefficienti della I e II forma quadratica fondamentale.
(c) Calcolare le curvature gaussiana e media nel punto generico di S e determinare quali punti sono ellittici, parabolici, iperbolici. Riconoscere dalla curvatura gaussiana e dalle equazioni di S di che superficie si tratta.
(d) Calcolare le curvature principali di S e la matrice dell'operatore di Weingarten L.

SOLUZIONE

(a) La superficie S è regolare ovunque tranne che nell'origine. Infatti la terza equazione dà, per $u, v \neq 0$: $v = \frac{z}{u}$ (oppure $u = \frac{z}{v}$), che sostituita nelle prime due dà $x = u\cos\frac{z}{u}$, $y = u\sin\frac{z}{u}$ (oppure $x = \frac{z}{v}\cos v$, $y = \frac{z}{v}\sin v$) da cui si vede la corrispondenza biunivoca fra i valori dei parametri ed i punti della superficie. Le funzioni che definiscono S sono di classe C^ω e le derivate parziali sono

$$\begin{array}{lll} x_u = \cos v & , \; y_u = \sin v & , \; z_u = v \\ x_v = -u\sin v & , \; y_v = u\cos v & , \; z_v = u \end{array}$$

la cui matrice ha rango 2 salvo che per $u = v = 0$. Pertanto S è regolare in tutti i suoi punti tranne l'origine. Il punto P_0 corrisponde ai valori $u_0 = 1, v_0 = 0$ ed il piano tangente ad S in esso ha equazione

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{cioè} \quad y - z = 0.$$

(b) I coefficienti della I Forma Quadratica Fondamentale valgono

$$E = 1 + v^2 \quad F = uv \quad G = 2u^2 \qquad \text{e risulta} \qquad EG - F^2 = u^2(2 + v^2).$$

Le derivate seconde sono

$$\begin{array}{lll} x_{uu} = 0 & x_{uv} = -\sin v & x_{vv} = -u\cos v \\ y_{uu} = 0 & y_{uv} = \cos v & y_{vv} = -u\sin v \\ z_{uu} = 0 & z_{uv} = 1 & z_{vv} = 0 \end{array}$$

e quindi i coefficienti della II Forma Quadratica Fondamentale valgono

$$\mathcal{L} = 0 \quad \mathcal{M} = 0 \quad \mathcal{N} = \frac{uv}{\sqrt{2 + v^2}}.$$

(c) Le formule danno curvatura gaussiana $k(P) \equiv 0$ e curvatura media $H = \frac{v(1+v^2)}{2u\sqrt{(2+v^2)^3}}$. I punti di S sono tutti parabolici, inoltre dalle equazioni si vede che S è una superficie rigata (le equazioni sono lineari in u) e tutte le sue rette passano per l'origine: in definitiva S è un cono di vertice O.
(d) Le curvature principali k_1, k_2 verificano le condizioni $k_1k_2 = k(P)$, $k_1 + k_2 = 2H$ da cui segue che una di esse vale 0 e l'altra vale $2H = \frac{v(1+v^2)}{u\sqrt{(2+v^2)^3}}$.La matrice dell'operatore di Weingarten è

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{G}{EG-F^2} & -\frac{F}{EG-F^2} \\ -\frac{F}{EG-F^2} & \frac{E}{EG-F^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{v}{\sqrt{(2+v^2)^3}} & \frac{v(1+v^2)}{u\sqrt{(2+v^2)^3}} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3 . Sia V un campo di vettori differenziabile sulla superficie regolare S di equazioni parametriche

$$x = x(u,v) \ , \ y = y(u,v) \ , \ z = z(u,v) \quad , \quad u, v \in \mathbb{R}$$

(a) Dare la definizione di derivata direzionale di V in un punto $P \in$S secondo un vettore tangente $X_P \in T_P$S ed enunciare le proprietà fondamentali della derivata direzionale.
(b) Dare la definizione e la formula della derivata covariante di V in un punto $P \in$S secondo un vettore tangente $X_P \in T_P$S ed enunciare le proprietà fondamentali della derivata covariante.
(c) Dare la definizione dell'operatore di Weingarten L e dimostrare che esso è simmetrico.
(d) Dare la definizione di curvature principali k_1, k_2 di S in un suo punto P_0 e scrivere la formula di Eulero.

SOLUZIONE: vedere gli appunti del corso.