CORSI DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTROTECNICA E INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2009-2010
PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DEL 13-01-10
Corsi dei Proff. M. BORDONI, M. MARIETTI

Esercizio 1 . Sia I il seguente insieme di vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\text{I}=\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

Considerando solo i vettori in I, determinare
(a) una base di $\mathbb{R}^3$;
(b) un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ che siano linearmente dipendenti;
(c) un insieme di vettori linearmente indipendenti che non formi una base di $\mathbb{R}^3$.

Inoltre, detta $\mathcal{B}$ la base scelta al punto (a), determinare
(d) le coordinate del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$;
(e) il vettore avente rispetto a $\mathcal{B}$ coordinate $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

SOLUZIONE

(a) I tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5$ sono linearmente indipendenti in quanto il loro determinante è diverso da zero e quindi costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.
(b) Tutti i vettori di I sono linearmente dipendenti (essendo in numero maggiore di 3, dimensione dello spazio ambiente) e sono un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ in quanto I contiene come suo sottoinsieme una base di $\mathbb{R}^3$.
(c) I due vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono indipendenti ma non costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.
(d) La scrittura $\mathbf{v} = y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + y_3\mathbf{v}_3$ dà luogo al sistema lineare

$$\begin{cases} y_1 + y_2 & = & 3 \\ 2y_1 - y_2 & = & -3 \\ \quad y_2 + y_3 & = & 3 \end{cases}$$

che ammette l'unica soluzione $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$: queste sono le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base di cui al punto (a), si ha cioè $\mathbf{v} = 0\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_2$.

(e) Il vettore richiesto è $\mathbf{w} = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 1\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2 . Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operatore lineare.
(a) Dare le definizioni di nucleo di L (Ker$L$) e di immagine di L (ImL).
(b) Qual è la relazione tra il nucleo di un operatore lineare L e l'iniettività e la suriettività di L? Giustificare le risposte.

Sia ora $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito da

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ z \end{pmatrix}.$$

(c) Trovare la matrice A associata a L rispetto alle basi canoniche e dire perché L è diagonalizzabile (senza trovare autovalori e autospazi di L).
(d) Trovare gli autovalori ed una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di L.
(e) Scrivere una forma diagonale di A.
(f) Trovare il nucleo di L, una sua base e la sua dimensione.

SOLUZIONE

(a) Il nucleo è l'insieme dei vettori che hanno per immagine il vettore nullo: Ker$L = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid L(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n\}$, mentre l'immagine è l'insieme dei vettori che provengono ciascuno da almeno un vettore di $\mathbb{R}^n$:
Im$L = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \text{ tale che } \mathbf{w} = L(\mathbf{v})\}$.
(b) L è iniettiva se e solo se Ker$L = \{\mathbf{0}\}$. Nel caso presente il teorema della nullità più rango ci dice che allora la dimensione dell'immagine è n e quindi L è anche suriettivo, cioè biiettivo. In definitiva L è un isomorfismo se e solo se il nucleo si riduce al vettore nullo.
(c) La matrice di L rispetto alle basi canoniche è la matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e quindi L è sicuramente diagonalizzabile per il teorema spettrale.

(d) Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione caratteristica $\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1] = 0$ e sono dunque uguali a 0,1,2. Gli autospazi si ottengono risolvendo il sistema lineare omogeneo di matrice $A - \lambda I$ in cui si sostituiscano a λ successivamente i valori trovati e sono

$$E(0) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{t \in R} \qquad E(1) = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}_{t \in R} \qquad E(2) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{t \in R}.$$

Gli autovettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono indipendenti ed ortogonali a due a due essendo relativi ad autovalori distinti. Pertanto la base ortonormale richiesta si ottiene dividendo ciascuno di essi per la propria norma:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(e) Il nucleo di L coincide con l'autospazio $E(0)$, dunque ha dimensione 1 ed una sua base è data dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3 . Nel piano euclideo, con riferimento cartesiano RC$(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, sono dati i punti $P \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}$ e $B \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$.

(a) Determinare h e k in modo che $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PB}$.

(b) Scrivere un'equazione cartesiana della retta r passante per i punti A e B trovati.

(c) Determinare un'equazione cartesiana della retta s passante per l'origine O e perpendicolare alla retta r.

(d) Detto Q il punto di intersezione delle rette r e s, determinare un'equazione cartesiana della circonferenza passante per i punti O, A e Q.

SOLUZIONE

(a) Si ha $\overrightarrow{PA} \equiv \begin{pmatrix} h-2 \\ 0-2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PB} \equiv \begin{pmatrix} 0-2 \\ k-2 \end{pmatrix}$ e quindi deve risultare $h-2=4$ e $-2=-2k+4$ da cui si ricava $h=6, k=3$.
(b) La retta r passante per $A \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $B \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ha equazione

$$\det \begin{pmatrix} x-6 & 0-6 \\ y-0 & 3-0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{cioè} \quad x+2y-6=0.$$

(c) La retta s ha equazione $2x-y=0$.
(d) Risolvendo il sistema formato dalle equazioni di r, s si ottengono le coordinate di Q, che sono $\begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$. Imponendo il passaggio della generica circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c=0$ per i punti O, A, Q si ha

$$c=0 \qquad 36+6a=0 \qquad \frac{36}{25}+\frac{144}{25}+\frac{6}{5}a+\frac{12}{5}b=0$$

da cui si ricava $a=-6, b=0, c=0$ sicché la circonferenza richiesta ha equazione $x^2+y^2-6x=0$.

Esercizio 4 . Nello spazio euclideo, con riferimento cartesiano RC$(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, si consideri la retta

$$r: \begin{cases} x-2z-3 & = & 0 \\ x-y & = & 0 \end{cases}$$

(a) Determinare un vettore direttore di r e scrivere equazioni parametriche di r.
(b) Determinare il piano α per $P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e perpendicolare a r e calcolare la distanza $d(r, P)$ del punto P dalla retta r.
(c) Verificato che $R \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a r e posto $H = \alpha \cap r$, calcolare il prodotto vettoriale $\overrightarrow{PH} \wedge \overrightarrow{PR}$.
(d) Calcolare il prodotto vettoriale $\overrightarrow{PR} \wedge \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(e) Date due rette r ed r' di parametri direttori $\begin{pmatrix} \ell \\ m \\ n \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \ell' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$, scrivere e dimostrare la formula che dà il coseno degli angoli formati da esse.

(f) Scrivere l'equazione della retta passante per un punto $P_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ e parallela ad r. Scrivere inoltre l'equazione del piano passante per P_0 e parallelo ad r ed r'.

SOLUZIONE

(a) Un vettore direttore di r è quello che ha per coordinate i parametri direttori di r che sono

$\ell = \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -2,\ m = -\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2,\ n = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1.$

Equazioni parametriche di r si ottengono ponendo ad esempio $x = t$ e sono $x = t,\ y = t,\ z = \frac{t-3}{2}$.

(b) Il piano α ha equazione $-2(x-1)-2(y-0)-1(z-1) = 0$ cioè $2x+2y+z-3 = 0$. Intersecando α ed r si ottiene il punto $H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e la distanza di P da r è uguale alla lunghezza del segmento PH che vale $\sqrt{5}$.

(c) $R \in r$ in quanto le sue coordinate soddisfano le equazioni di r. Si ha $\overrightarrow{PH} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PR} \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ e quindi $\overrightarrow{PH} \wedge \overrightarrow{PR} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 & 4 \\ \mathbf{j} & 1 & 5 \\ \mathbf{k} & -2 & 0 \end{pmatrix} = 10\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k} \equiv \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$. Risulta poi $\overrightarrow{PR} \wedge \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ essendo i due vettori proporzionali.

(d) Si ha $\cos \widehat{rr'} = \pm \frac{\ell\ell'+mm'+nn'}{\sqrt{(\ell^2+m^2+n^2)(\ell'^2+m'^2+n'^2)}}$ in quanto l'angolo fra le due rette è uguale all'angolo fra i rispettivi vettori direttori o al suo supplementare (donde il doppio segno) ed è noto che $\cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{v}'} = \frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}' \rangle}{||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{v}'||}$.

(e) La retta passante per P_0 e parallela ad r ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad \text{e cartesiane} \quad \operatorname{rg} \begin{pmatrix} x - x_0 & \ell \\ y - y_0 & m \\ z - z_0 & n \end{pmatrix} = 1.$$

Il piano per P_0 e parallelo ad r, r' ha equazione $\det \begin{pmatrix} x - x_0 & \ell & \ell' \\ y - y_0 & m & m' \\ z - z_0 & n & n' \end{pmatrix} = 0.$