

Manlio Bordoni

**APPUNTI SULLA RAPPRESENTAZIONE DEI SOTTOSPAZI
VETTORIALI DI \mathbb{R}^n**

I MODO.

Sia dato un insieme di generatori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{v}_k = \begin{pmatrix} v_{1k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{nk} \end{pmatrix}$$

di W : questo vuol dire che ogni vettore $\mathbf{w} \in W$ si scrive come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, ossia che $W = L_{\mathbb{R}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$. In questo caso, considerata la matrice costituita dalle coordinate dei vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$:

$$V_{(n,k)} = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1k} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ v_{n1} & \dots & v_{nk} \end{pmatrix}$$

il rango di $V_{(n,k)}$ dice quanti fra i vettori dati sono linearmente indipendenti: precisamente se

$$\text{rg}V_{(n,k)} = r$$

fra i vettori dati ce ne sono r e non più di r linearmente indipendenti; sono indipendenti i vettori i vettori le cui coordinate fanno parte di un minore di ordine r di $V_{(n,k)}$ con valore diverso da zero: questi r vettori costituiscono una base di W che pertanto ha dimensione r :

$$\dim W = \text{rg}V_{(n,k)}$$

Equazioni parametriche di W si hanno scrivendo il generico vettore $\mathbf{v} =$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ come combinazione lineare dei vettori della base di } W. \text{ Per}$$

trovare equazioni cartesiane di W , che saranno in numero pari alla codimensione di W :

$$\text{codim}W = n - \dim W = n - \text{rg}V_{(n,k)} = n - r$$

si procede all'eliminazione dei parametri oppure direttamente bisogna imporre che il generico vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ dia, con i vettori della base trovata di W , un insieme di vettori linearmente dipendenti e quindi che la matrice di tipo $(n,k+1)$ formata dalle coordinate di \mathbf{v} e da quelle dei vettori della base di W abbia ancora rango r . Usando il metodo degli orlati si ottengono le $n-r$ equazioni di W .

Esempio 1. Sia W il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^5 generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La matrice

$$V_{(4,3)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, come subito si verifica essendo ad esempio $\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$ mentre tutti i suoi orlati valgono 0. Pertanto W ha dimensione 2 ed una sua base è costituita dai vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ corrispondenti alle colonne del minore considerato.

Equazioni parametriche di W si ottengono imponendo che il generico vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^5$ sia combinazione lineare dei vettori della base di W : $\mathbf{v} = t\mathbf{v}_1 + t'\mathbf{v}_2$ e sono

$$x_1 = -t + t', \quad x_2 = 2t, \quad x_3 = t - 3t', \quad x_4 = t', \quad x_5 = 3t - t'$$

Equazioni cartesiane di W , che saranno in numero pari alla codimensione di W , $\text{codim}W = 5 - 2 = 3$, si trovano eliminando i parametri t, t' oppure

direttamente imponendo che

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} x_1 & -1 & 1 \\ x_2 & 2 & 0 \\ x_3 & 1 & -3 \\ x_4 & 0 & 1 \\ x_5 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Orlando i 3 minori di ordine 3 contenenti il minore di ordine 2 scelto in precedenza, si hanno le equazioni richieste

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Nota 1. La base di W non è determinata in modo unico in quanto nella matrice $V_{(n,k)}$ possono esserci diversi minori di ordine r con valore diverso da 0. Di conseguenza anche le equazioni di W non sono determinate in modo unico. Nell'esempio precedente, invece che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ avremmo potuto prendere come base di W i vettori $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ in quanto anche il minore costituito dalle IV e V riga e dalle II e III colonna è diverso da 0: $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3$.

Usando questi vettori e questo minore, avremmo avuto altre equazioni cartesiane per W , ma il sistema ottenuto sarebbe stato equivalente a quello trovato prima, nel senso che ammettono le stesse soluzioni (che sono le coordinate dei vettori di W). In effetti sarebbe immediato verificare che le equazioni di questo secondo sistema sono combinazioni lineari di quelle del primo.

II MODO.

Siano date equazioni cartesiane di W , quindi W è rappresentato come insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo

$$A_{(m,n)}X_{(n,1)} = 0_{(m,1)}$$

In questo caso si deve ricorrere al teorema di Rouchè-Capelli: il rango della matrice A ci dice quante sono le equazioni indipendenti del sistema, cioè se $\operatorname{rg}A = p$ possiamo eliminare le $m - p$ equazioni che non fanno parte di un

minore di ordine p con valore non nullo, in altri termini p è il numero minimo di equazioni necessarie per rappresentare W , ossia p è la codimensione di W :

$$\text{codim}W = \text{rg}A_{(m,n)} = p$$

Di conseguenza la dimensione di W è

$$\text{dim}W = n - \text{codim}W = n - \text{rg}A_{(m,n)} = n - p$$

conformemente al fatto che, sempre per il teorema di Rouchè-Capelli, il sistema ammette ∞^{n-p} soluzioni, trovate le quali si hanno automaticamente equazioni parametriche ed una base di W .

Esempio 2. Sia W il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^5 rappresentato dal sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

La matrice incompleta del sistema

$$A_{(4,5)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 3, come si vede considerando il minore di ordine 3 costituito dalla seconda, terza e quarta riga e dalle prime tre colonne di A che vale -2 (quello formato dalle prime 3 righe e colonne vale 0) mentre tutti i suoi orlati valgono 0, dunque

$$\text{codim}W = \text{rg}A_{(4,5)} = 3 \quad \text{e} \quad \text{dim}W = 5 - 3 = 2$$

Eliminando la prima equazione, ponendo $x_4 = t$ e $x_5 = t'$, portandoli a secondo membro e risolvendo il sistema così ottenuto secondo il teorema di Cramer, si trova

$$x_1 = -t' \quad x_2 = \frac{t}{2} - t' \quad x_3 = \frac{t}{2} - t' \quad x_4 = t \quad x_5 = t'$$

che sono equazioni parametriche di W . Scritto poi

$$W = \left\{ \left(\begin{array}{c} -t' \\ \frac{t}{2} - t' \\ \frac{t}{2} - t' \\ t \\ t' \end{array} \right) \right\}_{t,t' \in \mathbb{R}} = \left\{ t \left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) + t' \left(\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right\}_{t,t' \in \mathbb{R}}$$

una base di W è costituita dai vettori

$$\mathbf{w}_1 = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \quad \mathbf{w}_2 = \left(\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right)$$

Nota 2. Anche in questo caso, poiché in A possono esserci diversi minori di ordine p con valore non nullo, si possono trovare diversi sistemi di p equazioni che rappresentano W e di conseguenza diverse basi di W . Ritornando all'esempio 2, avremmo potuto considerare il minore non nullo formato da prima, seconda e quarta riga e dalle ultime 3 colonne di A : in tal caso avremmo dovuto eliminare la terza equazione, porre $x_1 = s, x_2 = s'$ e risolvere il sistema così ottenuto.