PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE DEL 08-06-09
Corso del Prof. M. BORDONI

Esercizio 1 . Data la cicloide $c = c(t)$ di equazioni parametriche

$$x = t - \sin t \quad , \quad y = 1 - \cos t \qquad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(a) Determinare un'ascissa curvilinea su c e calcolare la lunghezza dell'arco di curva descritto da $t \in [0, 2\pi]$ (si ricordi che $1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$).
(b) Calcolare la curvatura di c nel suo punto generico.
(c) Considerata poi nello spazio la curva $\gamma = \gamma(t)$ di equazioni parametriche

$$x = t - \sin t \quad , \quad y = 1 - \cos t \quad , \quad z = t \qquad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

calcolarne la curvatura e la torsione nel suo punto generico e dedurne se γ è piana o sghemba.
(d) Determinare il piano osculatore e la base mobile di γ nel punto P_0 della curva corrispondente al valore $t_0 = \frac{\pi}{2}$ del parametro.
(e) Determinare il centro, il raggio ed equazioni cartesiane del cerchio osculatore a γ nel punto P_0.

Esercizio 2 . Sia S la superficie di equazioni parametriche

$$x = e^u \cos v \quad , \quad y = e^u \sin v \quad , \quad z = v \qquad , \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$

(a) Verificare che S è regolare e calcolare l'equazione del piano tangente ad S nel suo punto $P_0 \equiv (1, 0, 0)$.
(b) Calcolare i coefficienti della I e II forma quadratica fondamentale.
(c) Calcolare le curvature gaussiana e media nel punto generico di S e determinare quali punti sono ellittici, parabolici, iperbolici. Calcolare inoltre le curvature principali di S.
(d) Calcolare la matrice dell'operatore di Weingarten L.

Esercizio 3 . Sia S la superficie di equazioni parametriche

$$x = x(u, v) \ , \ y = y(u, v) \ , \ z = z(u, v) \quad , \quad u, v \in \mathbb{R}$$

(a) Dare la definizione dell'applicazione di Gauss $\mathcal{G}$ e dell'operatore di Weingarten L.
(b) Dare la definizione di curvature principali k_1, k_2 di S in un suo punto P_0 e scrivere la formula di Eulero.
(c) Dimostrare che k_1, k_2 sono gli autovalori dell'operatore di Weingarten L.