6.4 Formule di Green-Gauss in $\mathbb{R}^2$

Tali formule permettono di trasformare un integrale doppio in un opportuno integrale curvilineo e sono ricche di applicazioni, come vedremo in questo § e nei successivi. Esse valgono subordinatamente a certe ipotesi sul dominio a cui è esteso l'integrale doppio; premettiamo perciò alcune definizioni.

Sia T un dominio del piano xy. Diremo che esso è un *dominio regolare rispetto all'asse* x quando è un dominio normale rispetto all'asse x, cioè del tipo

$$T = \Big\{(x,y)|x \in [a,b], \alpha(x) \le y \le \beta(x)\Big\}, \quad \big[\text{con} \quad \alpha(x) < \beta(x), \quad \forall x \in (a,b)\big],$$

con $\alpha(x), \beta(x)$ (non solo continue, ma) *di classe* C^1 in $[a,b]$.

La frontiera ∂T di un tale dominio si compone, oltre che di due (eventuali) segmenti paralleli all'asse y, dei grafici in $[a,b]$ delle due funzioni $y = \alpha(x), y = \beta(x)$ che sono due curve regolari, le cui tangenti non sono mai parallele all'asse y[(2)].

In modo perfettamente analogo si definisce un *dominio regolare rispetto all'asse* y.

Diremo poi che T è un *dominio regolare* quando verifica le due condizioni seguenti:

α) è decomponibile in un numero finito di dominii $T_1, T_2, \ldots, T_\nu$ (vedi § 5.1 nel caso dei compatti), *ognuno dei quali è un dominio regolare rispetto ad uno degli assi* x, y;

β) *la sua frontiera* ∂T *è costituita da un numero finito di curve regolari* aventi in comune, a due a due, al più i loro punti estremi[(3)].

Per esempio, la figura 6.4.1a) mostra che un cerchio è un dominio regolare perché si può decomporre nei dominii T_1, T_2, T_3, di cui i primi due sono regolari rispetto all'asse y ed il terzo rispetto all'asse x. Il dominio T ombreggiato in figura 6.4.1b) è regolare perché lo si è potuto decomporre in 8 dominii di cui 5 regolari rispetto all'asse x e 3 rispetto all'asse y[(4)]. In entrambi i casi è poi evidentemente verificata la condizione β).

In base alla definizione posta ed al teorema 4.6.II, è evidente che *ogni dominio regolare è limitato e misurabile*.

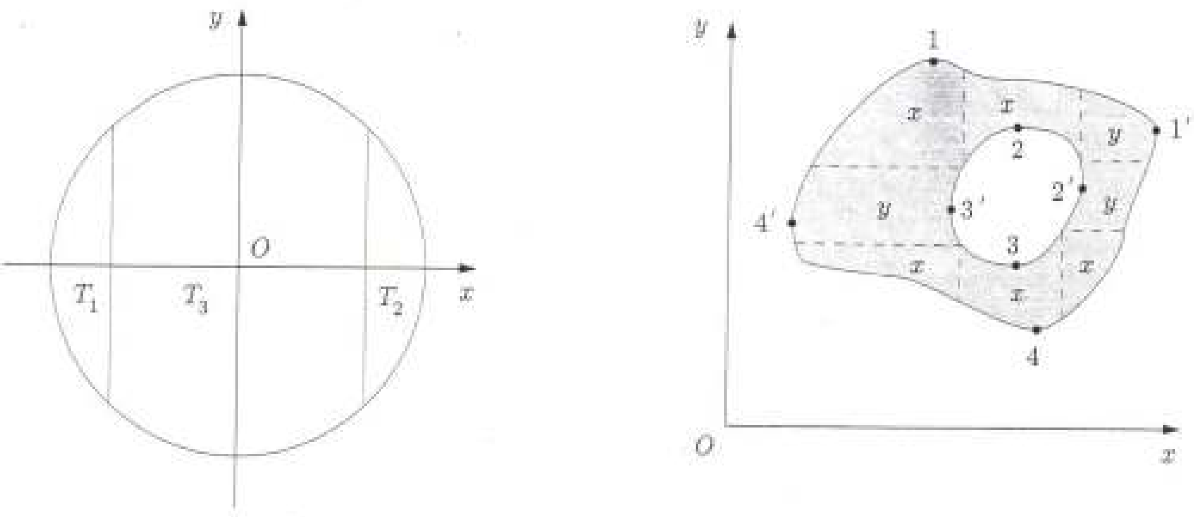
Su ciascuna delle curve regolari che costituiscono ∂T, riguarderemo come *verso positivo* quello secondo il quale deve avanzare un osservatore per avere alla sua sinistra l'interno di T (fig. 6.4.2). Per integrale curvilineo di una forma differenziale

---

[(2)] Per esempio il cerchio $x^2 + y^2 \le r^2$ non è un dominio regolare rispetto all'asse x (e nemmeno rispetto all'asse y).

[(3)] La condizione β) non è in generale conseguenza della α), cioè esistono dominii T, decomponibili per esempio in due domini regolari rispetto a uno degli assi, che hanno la frontiera ∂T costituita da *infinite* curve regolari; si veda "*Esercizi II*", § 6.32.

[(4)] Nella figura 6.4.1b) sono segnati su ∂T i punti 1,2,3,4 ove la tangente è parallela all'asse x ed i punti $1', 2', 3', 4'$ ove la tangente è parallela y. I primi non possono stare sulle curve relative ad un dominio parziale regolare rispetto all'asse y, i secondi non possono stare sulle curve relative ad un dominio parziale regolare rispetto all'asse x. Ciò spiega la decomposizione effettuata.



a) Fig. 6.4.1 b)

$X(x,y)dx + Y(x,y)dy$, *esteso alla frontiera* ∂T *di un dominio regolare* T, *percorsa nel verso positivo*, intenderemo la somma degli integrali curvilinei di tale forma estesi alle varie curve regolari (percorse nel predetto verso positivo) che compongono ∂T; lo indicheremo col simbolo $\int\limits_{+\partial T} X\,dx + Y\,dy$[5].

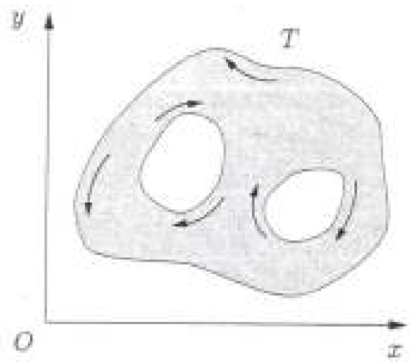


Fig. 6.4.2

Dimostriamo la seguente proprietà additiva:

Teorema 6.4.I – *Se un dominio regolare* T *è decomposto in un numero finito di dominii regolari* $T_1, T_2, \ldots, T_\nu$ (§ 5.1), *sussiste la formula:*

$$\int\limits_{+\partial T} X\,dx + Y\,dy = \sum_{i=1}^{\nu} \int\limits_{+\partial T_i} X\,dx + Y\,dy\,. \tag{6.4.1}$$

Possiamo ora dimostrare il teorema seguente che fornisce le annunciate *formule di Green-Gauss*:

Teorema 6.4.II – *Se T è un dominio regolare del piano xy e se $f(x,y)$, $g(x,y) \in C^0(T)$ ed inoltre $f_x(x,y), g_y(x,y) \in C^0(T)$, risulta*

$$\iint_T \frac{\partial f}{\partial x} dx\, dy = \int_{+\partial T} f\, dy\,, \tag{6.4.2}$$

$$\iint_T \frac{\partial g}{\partial y} dx\, dy = - \int_{+\partial T} g\, dx^{(6)}\,. \tag{6.4.3}$$

Le (6.4.2), (6.4.3) si possono scrivere complessivamente con un'unica formula

$$\iint_T \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{+\partial T} f\, dy - g\, dx\,, \tag{6.4.7}$$

che presenta a secondo membro una dissimmetria nelle variabili x, y. Ciò è facilmente giustificabile per il fatto che scambiando le variabili x, y si dovrebbero scambiare i termini *destra e sinistra*, mentre abbiamo mantenuto come unico verso $+\partial T$ quello che lascia l'interno di T a sinistra.

6.5 Il teorema della divergenza

Le (6.4.2), (6.4.3), (6.4.7) si possono tuttavia unificare scrivendo gli integrali curvilinei delle forme differenziali a secondo membro, come integrali curvilinei di funzioni. Introdotta su ∂T (cioè sugli archi regolari che la compongono) un'ascissa curvilinea s, contata positivamente nel verso $+\partial T$ già stabilito, e considerata nei singoli *punti regolari* di ∂T la *retta tangente* τ orientata positivamente nel senso delle s crescenti (cioè di $+\partial T$) sia n la normale a τ orientata in modo che la coppia di rette orientate τ, n sia sovrapponibile in direzione e verso alla coppia orientata x, y; sia cioè

$$\widehat{\tau n} = +\pi/2\,.$$

Ciò equivale a dire che n è orientata positivamente verso *l'interno* di T; la chiameremo perciò *normale interna* [fig. 6.5.1].

Poiché si ha $\widehat{xn} = \widehat{xy} + \widehat{y\tau} + \widehat{\tau n} = \widehat{y\tau} + \pi$ risulta

$$\cos \widehat{xn} = -\cos \widehat{y\tau}\,;$$

inoltre ricordando che si passa dai coseni direttori di una retta a quelli della normale scambiandoli di posto e uno solo di segno, si ha anche

$$\cos \widehat{yn} = \cos \widehat{x\tau}\,.$$

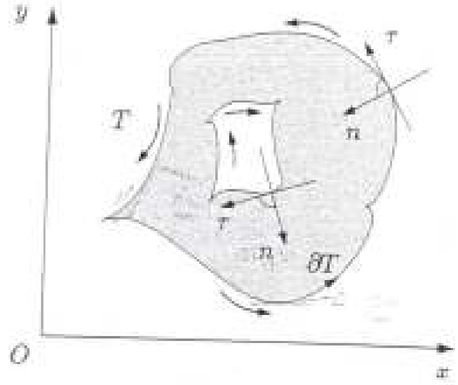


Fig. 6.5.1

Dalle (6.1.13) risulta allora che nei punti di ∂T si ha

$$dx = \cos \widehat{yn}\, ds, \qquad dy = -\cos \widehat{xn}\, ds\,. \tag{6.5.1}$$

Ciò premesso, le (6.4.2), (6.4.3) e la loro somma (6.4.7) assumono la forma simmetrica rispetto alle variabili x, y:

$$\iint_T \frac{\partial f}{\partial x} dx\, dy = -\int_{+\partial T} f \cos \widehat{xn}\, ds; \quad \iint_T \frac{\partial g}{\partial y} dx\, dy = -\int_{+\partial T} g \cos \widehat{yn}\, ds\,; \tag{6.5.2}$$

$$\iint_T \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) dx\, dy = -\int_{+\partial T} (f \cos \widehat{xn} + g \cos \widehat{yn}) ds\,. \tag{6.5.3}$$

Alle (6.4.7) o (6.5.3) si dà il nome di *teorema della divergenza*.

Introdotto il campo vettoriale $\overrightarrow{\Phi} = \overrightarrow{\Phi}(x,y) \equiv [f(x,y), g(x,y)]$, $(x,y) \in T$, si chiama *divergenza di* $\overrightarrow{\Phi}$ nel punto (x,y) e si indica con $\operatorname{div} \overrightarrow{\Phi}$, l'espressione (scalare)

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\Phi} = f_x(x,y) + g_y(x,y)\,; \tag{6.5.4}$$

allora, indicando con $\vec{n}$ il versore della normale *interna* a ∂T[7], l'espressione $f\cos\widehat{xn} + g\cos\widehat{yn}$ che figura in (6.5.3) è il prodotto scalare $\overrightarrow{\Phi}\cdot\vec{n}$. La (6.5.3) si può scrivere perciò

$$\iint_T \operatorname{div}\overrightarrow{\Phi}\,dT = -\int_{+\partial T} \overrightarrow{\Phi}\cdot\vec{n}\,ds \tag{6.5.5}$$

che costituisce la forma vettoriale del teorema della divergenza. Per completezza va detto che in Fisica assai spesso si fa riferimento alla "*normale esterna*" e perciò la (6.5.5) va scritta a secondo membro con il segno +.

Il termine $\overrightarrow{\Phi}\cdot\vec{n}\,ds$ si chiama flusso elementare del vettore $\overrightarrow{\Phi}$ e l'integrale a secondo membro (6.5.5) assume il nome di *flusso* (totale) *del vettore* $\overrightarrow{\Phi}$ *uscente* da ∂T (per una ragione che sarà spiegata dettagliatamente in $\mathbb{R}^3$).

Se $\operatorname{div}\overrightarrow{\Phi} = 0$, $\forall(x,y)\in T$ il campo vettoriale $\overrightarrow{\Phi}$ è detto *solenoidale*; in tale caso il flusso (totale) uscente da ∂T è *nullo*.

6.6 Valutazioni di integrali doppi con le formule di Green-Gauss

Sia $f(x,y)$ una funzione continua in un dominio T regolare di $\mathbb{R}^2$; se è nota una sua *primitiva parziale* rispetto x, cioè una funzione $F(x,y)$ continua in T tale che

$$f(x,y) = F_x(x,y), \qquad (x,y)\in T\,, \tag{6.6.1}$$

dalla (6.4.2) applicata alla funzione F_x segue

$$\iint_T f(x,y)dx\,dy = \int_{+\partial T} F\,dy\,, \tag{6.6.2}$$

onde il calcolo di un integrale doppio è ricondotto ad un integrale curvilineo (cioè semplice). Analogamente se $g = G_y$ si ha

$$\iint_T g\,dx\,dy = -\int_{+\partial T} G\,dx\,. \tag{6.6.3}$$

Le (6.6.2), (6.6.3) sono di immediata applicazione nel caso di frontiere ∂T aventi equazioni parametriche non complicate.

Esempio 1 - Calcolare l'integrale doppio $\iint_T x^2y^2\,dx\,dy$ ove T è il dominio limitato dall'ellisse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (di equazioni parametriche $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, con $0\le t\le 2\pi$). Facciamo il calcolo applicando la (6.6.2); si trova successivamente

[7] Tutte le considerazioni svolte sono basate sulla possibilità di orientare $\vec{n}$ verso l'*interno* di T. Si può dimostrare che se P è un punto "regolare" di ∂T esiste un segmento $P'P''$ avente P come punto medio tale che $P'P$ appartiene a T, la parte rimanente a $\mathcal{C}T$.

$$\iint_T x^2y^2\,dx\,dy = \iint_T \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{3}x^3y^2\right)dx\,dy = \frac{1}{3}\int_{+\partial T} x^3y^2dy =$$

$$= \frac{1}{3}a^3b^3\int_0^{2\pi}\cos^4 t\sin^2 t\,dt = \frac{4}{3}a^3b^3\int_0^{\pi/2}(\cos^4 t - \cos^6 t)dt =$$

$$= \frac{4}{3}a^3b^3\left(\frac{3\pi}{16} - \frac{5\pi}{32}\right) = \frac{\pi}{24}a^3b^3\,.$$

* * *

Nel caso particolare $f = 1$ oppure $g = 1$, le (6.6.2), (6.6.3) danno rispettivamente

$$\text{area}\,T = \int_{+\partial T} x\,dy, \quad \text{area}\,T = -\int_{+\partial T} y\,dx\,; \tag{6.6.4}$$

tali formule danno anche

$$\text{area}\,T = \frac{1}{2}\int_{+\partial T} x\,dy - y\,dx\,. \tag{6.6.5}$$

Le relazioni ora stabilite permettono di esprimere l'area di un dominio regolare T per mezzo di un opportuno integrale curvilineo di forma differenziale lineare (non esatta) esteso alla frontiera ∂T.

Esempio 2 - Dato il dominio regolare T la cui frontiera ∂T è l'*asteroide* di equazioni parametriche $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$ [fig. 6.6.1] si ha

$$\text{area}\,T = \frac{1}{2}\int_{+\partial T} x\,dy - y\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi}[a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t +$$

$$+ a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t]dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\,dt = \frac{3}{8}\pi a^2\,.$$

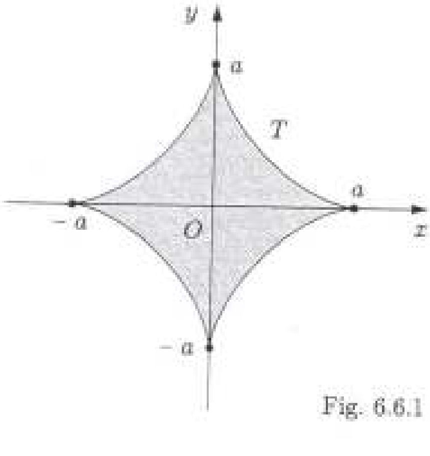


Fig. 6.6.1

* * *

Dalle formule di Green-Gauss (6.4.2), (6.4.3) si possono dedurre formule di integrazione per parti. Se $u(x,y)$, $v(x,y)$, $u_x(x,y)$, $v_x(x,y)$ sono funzioni continue in T, da (6.4.2) si ha

$$\iint_T \frac{\partial(uv)}{\partial x}dx\,dy = \int_{+\partial T} u\,v\,dy\,.$$