equivale a studiare per $\forall\, t \in [0,1]$ la funzione composta

$$F(t) = f(x_1 + t\Delta x_1, \ldots, x_n + t\Delta x_n)\,.$$

Ad essa è applicabile il teorema 17.4.I in quanto la f avendo tutte le derivate parziali nulle identicamente [cioè continue perché costanti] è differenziabile in A. Per $F(t)$ si ha

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \Delta x_1 = 0 \cdot \Delta x_1 + \ldots + 0 \cdot \Delta x_n = 0\,, \qquad \forall\, t \in [0,1]\,.$$

Dalla $F'(t) \equiv 0$ segue $F(t)$ costante sul segmento PQ, onde $f(P) = f(Q)$. Presi ora due *qualsiasi* punti P^*, $Q^* \in A$, per la connessione di A, possiamo congiungerli con una poligonale di vertici $P^*, P_1, P_2, \ldots, P_\nu, Q^*$ tutta contenuta in A. Poiché f è costante sui singoli segmenti, sarà $f(P^*) = f(P_1)$, $f(P_1) = f(P_2), \ldots, f(P_{\nu-1}) = f(P_\nu)$, $f(P_\nu) = f(Q^*)$, cioè $f(P^*) = f(Q^*)$ e, *per l'arbitrarietà di tali punti*, f è costante in A.

Se poi E è un insieme *internamente connesso*, per quanto ora provato si ha f costante in $\overset{\circ}{E}$. D'altra parte essendo f continua in E, i valori assunti nei punti di $E \cap \partial E$ si ottengono attraverso passaggio al limite dei valori (cioè del valore costante) assunti su $\overset{\circ}{E}$, onde la tesi. □

17.5 Derivata secondo una direzione, gradiente

In questo §, volendo dare una visione geometrica alle questioni trattate, ci limiteremo a considerare una funzione $f = f(x,y,z)$ definita in un campo $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Quanto stabilito, si estende a funzioni di $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$.

Fissato un punto $P \equiv (x,y,z) \in A$, conduciamo per esso una retta orientata, o asse r, di coseni direttori α, β, γ. Andiamo a definire la cosiddetta *derivata di f in P secondo l'asse r*, o, come più comunemente si dice, *secondo la direzione r*.

Per ogni punto Q variabile su r si introduca la *distanza con segno* $\overrightarrow{PQ} = t$ (con $\overline{PQ} = |t|$) da ritenersi positiva o negativa secondoché il verso da P a Q coincide od è opposto al verso dell'asse r; dopo ciò si ha $Q \equiv (x + \alpha t, y + \beta t, z + \gamma t)$. Poiché A è un campo, c'è un intorno circolare di centro P e raggio $\sigma > 0$ contenuto in A. Allora per $|t| < \sigma$ il segmento PQ è tutto contenuto in A e per $0 < |t| < \sigma$ ha senso considerare il *rapporto incrementale* (*direzionale*)

$$\frac{\Delta_r f}{\overrightarrow{PQ}} = \frac{f(Q) - f(P)}{t} = \frac{f(x + \alpha t, y + \beta t, z + \gamma t) - f(x,y,z)}{t}\,,$$

ed eseguire il passaggio al limite per $t \to 0$, cioè per $Q \to P$ su r.

Se *esiste finito*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Delta_r f}{t}\,, \tag{17.5.1}$$

si dirà che *f è in P derivabile secondo l'asse r* (o più impropriamente *secondo la direzione r*); il valore limite, detto derivata della f in P secondo l'asse r, sarà indicato con $\frac{\partial f}{\partial r}$.

equivale a studiare per $\forall\, t \in [0,1]$ la funzione composta

$$F(t) = f(x_1 + t\Delta x_1, \ldots, x_n + t\Delta x_n)\,.$$

Ad essa è applicabile il teorema 17.4.I in quanto la f avendo tutte le derivate parziali nulle identicamente [cioè continue perché costanti] è differenziabile in A. Per $F(t)$ si ha

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\Delta x_1 = 0\cdot\Delta x_1 + \ldots + 0\cdot\Delta x_n = 0\,, \qquad \forall\, t \in [0,1]\,.$$

Dalla $F'(t) \equiv 0$ segue $F(t)$ costante sul segmento PQ, onde $f(P) = f(Q)$. Presi ora due *qualsiasi* punti P^*, $Q^* \in A$, per la connessione di A, possiamo congiungerli con una poligonale di vertici $P^*, P_1, P_2, \ldots, P_\nu, Q^*$ tutta contenuta in A. Poiché f è costante sui singoli segmenti, sarà $f(P^*) = f(P_1)$, $f(P_1) = f(P_2), \ldots, f(P_{\nu-1}) = f(P_\nu)$, $f(P_\nu) = f(Q^*)$, cioè $f(P^*) = f(Q^*)$ e, *per l'arbitrarietà di tali punti*, f è costante in A.

Se poi E è un insieme *internamente connesso*, per quanto ora provato si ha f costante in $\overset{\circ}{E}$. D'altra parte essendo f continua in E, i valori assunti nei punti di $E \cap \partial E$ si ottengono attraverso passaggio al limite dei valori (cioè del valore costante) assunti su $\overset{\circ}{E}$, onde la tesi. □

17.5 Derivata secondo una direzione, gradiente

In questo §, volendo dare una visione geometrica alle questioni trattate, ci limiteremo a considerare una funzione $f = f(x,y,z)$ definita in un campo $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Quanto stabilito, si estende a funzioni di $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$.

Fissato un punto $P \equiv (x,y,z) \in A$, conduciamo per esso una retta orientata, o asse r, di coseni direttori α, β, γ. Andiamo a definire la cosiddetta *derivata di f in P secondo l'asse r*, o, come più comunemente si dice, *secondo la direzione r*.

Per ogni punto Q variabile su r si introduca la *distanza con segno* $\overrightarrow{PQ} = t$ (con $\overline{PQ} = |t|$) da ritenersi positiva o negativa secondoché il verso da P a Q coincide od è opposto al verso dell'asse r; dopo ciò si ha $Q \equiv (x + \alpha t, y + \beta t, z + \gamma t)$. Poiché A è un campo, c'è un intorno circolare di centro P e raggio $\sigma > 0$ contenuto in A. Allora per $|t| < \sigma$ il segmento PQ è tutto contenuto in A e per $0 < |t| < \sigma$ ha senso considerare il *rapporto incrementale* (*direzionale*)

$$\frac{\Delta_r f}{\overrightarrow{PQ}} = \frac{f(Q) - f(P)}{t} = \frac{f(x+\alpha t, y+\beta t, z+\gamma t) - f(x,y,z)}{t}\,,$$

ed eseguire il passaggio al limite per $t \to 0$, cioè per $Q \to P$ su r.

Se *esiste finito*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Delta_r f}{t}\,, \tag{17.5.1}$$

si dirà che *f è in P derivabile secondo l'asse r* (o più impropriamente *secondo la direzione r*); il valore limite, detto derivata della f in P secondo l'asse r, sarà indicato con $\frac{\partial f}{\partial r}$.

Si ha il seguente esempio notevole di funzioni derivabili secondo *ogni* asse:

Teorema 17.5.I – *Se f è differenziabile in un fissato $P \in A$, allora, comunque si fissi l'asse r, esiste in P la derivata direzionale e si ha*

$$\frac{\partial f}{\partial r} = f_x(P)\cdot\alpha + f_y(P)\cdot\beta + f_z(P)\cdot\gamma\,. \tag{17.5.2}$$

Dimostrazione – Basta osservare che il rapporto incrementale direzionale altro non è che il rapporto incrementale $[F(t) - F(0)]/t$ della funzione composta $F(t) = f(x+\alpha t, y+\beta t, z+\gamma t)$, sicuramente derivabile per $t = 0$ per l'ipotesi di differenziabilità di f in P e per la derivabilità di $x + \alpha t$, $y + \beta t$, $z + \gamma t$. Inoltre il teorema 17.4.I di derivazione delle funzioni composte assicura che

$$F'(0) = f_x(P)\alpha + f_y(P)\beta + f_z(P)\gamma\,,$$

onde la tesi. □

Si può rilevare che se r coincide con uno degli assi coordinati, ad esempio l'asse x, si ha $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ e quindi il rapporto incrementale direzionale si identifica con quello parziale rispetto ad x. Pertanto le derivate parziali rispetto alle singole variabili x, y, z, *se esistono*, sono particolari derivate direzionali rispettivamente nelle direzioni degli assi x, y, z.

Il teorema 17.5.I esprime allora il fatto estremamente interessante per le applicazioni che, nell'ipotesi di *differenziabilità*, la derivata secondo una qualsiasi direzione *esiste ed è esprimibile* attraverso quelle secondo tre assi ortogonali x, y, z, mediante la loro combinazione lineare a coefficienti α, β, γ.

Osservazione I - Conviene osservare che l'ipotesi di differenziabilità è condizione sufficiente, *non necessaria*, per l'esistenza della derivata direzionale secondo *tutte* le direzioni uscenti da un fissato punto. Ad esempio la funzione $f(x,y) = x^2y/[x^4+y^2]$ per $(x,y) \neq (0,0)$, con $f(0,0) = 0$, già considerata nel § 16.4, non è continua in (0,0) e perciò a maggior ragione non è differenziabile in tale punto, eppure essa è derivabile secondo ogni direzione uscente dal punto stesso e si ha $\frac{\partial f}{\partial r}(0,0) = \alpha^2/\beta$ se $\beta \neq 0$ e per $\beta = 0$ $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Si noti che non vale la (17.5.2) dato che, essendo anche $f_y(0,0) = 0$, dovrebbe essere $\frac{\partial f}{\partial r} \equiv 0$, $\forall\, (\alpha, \beta)$.

* * *

Mantenendoci nella ipotesi di differenziabilità in $P \in A$, si può dare una visione globale di tutte le possibili derivate direzionali in P, collegando al punto P ed alla funzione f un *vettore* avente per componenti i valori $f_x(P)$, $f_y(P)$, $f_z(P)$. Tale vettore si chiama *gradiente* della f nel punto P e si indica con $\operatorname{grad} f$ (la sua definizione richiede perciò solo la derivabilità parziale rispetto alle x, y, z in P).

Detto $\overrightarrow{r}$ il versore dell'asse r, se il gradiente non è nullo, cioè $|\operatorname{grad} f|^2 = f_x(P)^2 + f_y(P)^2 + f_z(P)^2 > 0$, la (17.5.2) si può scrivere

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \overrightarrow{r}\cdot\operatorname{grad} f\,, \tag{17.5.3}$$

avendo utilizzato il prodotto scalare dei due vettori. Da tale espressione si ha:

Teorema 17.5.II – *Se f è differenziabile in $P \in A$, la derivata direzionale assume al variare di r il valore massimo [minimo], quando $\overrightarrow{r}$ ha direzione e o di* grad f *[di* $-$ grad f*].*

Dimostrazione – Dalla (17.5.3), detto $\lambda(r, f)$ l'angolo di $\overrightarrow{r}$ con grad f (indi-o con $|\operatorname{grad} f|$ il modulo del vettore), si ha

$$\frac{\partial f}{\partial r} = |\operatorname{grad} f| \cdot \cos \lambda(r, f)\,,$$

max $\frac{\partial f}{\partial r} = |\operatorname{grad} f|$ se $\lambda(r, f) = 0$; min $\frac{\partial f}{\partial r} = -|\operatorname{grad} f|$ se $\lambda(r, f) = \pi$. □

Anche questo risultato, come i precedenti, si estende a funzioni di $\mathbb{R}^n$.

Ulteriori proprietà per grad f si trovano nei § 18.2, 18.3.

6 Differenziali totali successivi

Sia f definita nel campo $A \subseteq \mathbb{R}^n$; diremo che essa è *differenziabile m volte* $m \geq 2$) *in A*, se è ivi dotata di tutte le derivate parziali di ordine $m-1$ e te sono differenziabili in A.

Nel § 17.3, per una funzione differenziabile in A, considerato a partire da $P \in A$ rbitrario incremento $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$, si è definito il differenziale (totale o)

$$df = df[P, \Delta x] = \sum_{h=1}^{n} f_{x_h}(P)\Delta x_h\,, \tag{17.6.1}$$

lipende perciò da P *e linearmente* dalle n variabili Δx_1, $\Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.

Se f è differenziabile 2 volte in A, definiremo *differenziale* (*totale*) *secondo f in un punto $P \in A$*, da indicarsi con $d^2 f = d^2 f[P, \Delta x]$ *il differenziale del renziale primo, calcolato trattando $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$* (cioè Δx) *come costanti*. Si ertanto

$$\begin{aligned} d^2 f[P, \Delta x] &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\big(df[P, \Delta x]\big)\Delta x_k = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_k \partial x_h}\Delta x_h\right)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_k \partial x_h} \cdot \Delta x_h \cdot \Delta x_k\,. \end{aligned} \tag{17.6.2}$$

In modo analogo se f è differenziabile 3 volte in A, $\forall\ P \in A$ si definisce il *renziale* (*totale*) *terzo $d^3 f = d^3 f[P, \Delta x]$ differenziando il differenziale secondo*, ando ancora Δx come *costante*:

$$d^3 f[P, \Delta x] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial^3 f(P)}{\partial x_i \partial x_k \partial x_h} \cdot \Delta x_h \cdot \Delta x_k \cdot \Delta x_i\,. \tag{17.6.3}$$

Parimenti s
m volte in A; co

$d^m f = d^m f[P,$

Naturalme
sostituire i *diffe*

Osservazione I
che f è m volt
opportuno into
sono differenzia
differenziale d^m

Osservazione I
sufficienti per l
è *differenziabil*
un fissato $P \in$
continue in P,
I in luogo di A

Mantenen
del calcolo dei
Applicando m

Teorema
m volte in $(t_1,$
$P \in A$ [*in* A],
$(t_1, \ldots, t_p)$ [*in*

Nel caso
Per ciò ch
totale primo,
non essendo p
(quando inve
conto della *d*

e quindi