È interessante tornare all'esempio precedente, relativo all'equazione differenziale lineare del primo ordine

$$y' - \frac{y}{tg\,x} = \operatorname{sen} x\,, \tag{23.24}$$

ed osservare la figura 3.7, eseguita al computer, dove sono rappresentate in uno stesso sistema di riferimento più soluzioni $y(x) = (x+c)\operatorname{sen} x$, al variare della costante fra i valori $c = 1,2,3,4,5$. Si noti che in corrispondenza del punto iniziale $x_0 = 0$ (ed anche per $x_0 = \pm\pi$) il problema di Cauchy associato all'equazione (23.24), con dato iniziale $y(x_0) = 0$, non ha unicità. Il problema di Cauchy associato all'equazione (23.24) non ha invece esistenza se il dato iniziale $y(x_0)$ è diverso dallo zero.

Il motivo risiede nel fatto che il coefficiente dell'equazione $a_0(x) = -1/tg\,x$ non è continuo per $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{N}$. Al contrario, tale coefficiente può essere esteso con continuità anche ad esempio nei punti $x_0 = \pm\pi/2$, ed in corrispondenza di tali punti le soluzioni in figura 3.7 non evidenziano alcuna singolarità.

24. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine omogenee

Un'equazione differenziale lineare del secondo ordine è del tipo

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)\,, \tag{24.1}$$

con $a_1(x)$, $a_0(x)$, $g(x)$ funzioni continue in un intervallo $[a,b]$. *L'equazione omogenea associata* è data da

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0\,. \tag{24.2}$$

In questo paragrafo studiamo *l'integrale generale dell'equazione omogenea* (24.2), cioè l'insieme di tutte le soluzioni di (24.2). Ricordiamo che una *soluzione* dell'equazione differenziale (24.1) (rispettivamente (24.2)) è una funzione $y = y(x)$, derivabile due volte in [a,b], che soddisfa la condizione (24.1) (rispettivamente (24.2)) per ogni $x \in [a,b]$.

Con la terminologia degli *spazi vettoriali*, cominciamo col ricordare che due funzioni $y_1(x), y_2(x)$, definite in un intervallo $[a,b]$, si dicono *dipendenti* se esistono due costanti c_1, c_2, non entrambe nulle, tali che

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0, \qquad \forall x \in [a,b]\,. \tag{24.3}$$

In caso contrario le funzioni $y_1(x), y_2(x)$ si dicono *indipendenti*. Pertanto $y_1(x), y_2(x)$ sono indipendenti in $[a,b]$ se la condizione (24.3) implica che $c_1 = c_2 = 0$.

Un criterio per stabilire se due funzioni siano indipendenti in un intervallo $[a,b]$ è enunciato nel risultato che segue. A tale scopo definiamo il *determinante wronskiano* $W(x)$ di due funzioni derivabili y_1, y_2

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \tag{24.4}$$

CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA INDIPENDENZA DI DUE FUNZIONI. — *Indichiamo con $W(x)$ il determinante wronskiano di due funzioni derivabili y_1, y_2 in un intervallo $[a,b]$. Se esiste un punto $x_0 \in [a,b]$ per cui $W(x_0) \neq 0$ le due funzioni $y_1(x)$, $y_2(x)$ sono indipendenti in $[a,b]$.*

Dimostrazione: allo scopo di provare che le due funzioni $y_1(x), y_2(x)$ sono indipendenti, supponiamo che esistano due costanti c_1, c_2, tali che

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0, \qquad \forall x \in [a,b] \tag{24.5}$$

e proviamo che $c_1 = c_2 = 0$. Infatti per derivazione da (24.5) otteniamo

$$c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x) = 0, \qquad \forall x \in [a,b] \tag{24.6}$$

Il sistema delle due equazioni (24.5), (24.6) nelle due incognite c_1, c_2 è univocamente risolubile per $x = x_0$, in base al teorema di Cramer, dato che il determinante della matrice dei coefficienti, uguale al wronskiano $W(x_0)$, è differente da zero per ipotesi. Essendo il sistema omogeneo, l'unica soluzione è $c_1 = c_2 = 0$.

Con il risultato seguente mettiamo in luce una proprietà di dipendenza o indipendenza relativa non a funzioni qualsiasi, ma a *soluzioni* dell'equazione omogenea (24.2). Riportiamo tale risultato per completezza, senza dimostrazione in questa sede, ricordando che il problema è affrontato in generale, nel caso delle equazioni differenziali lineari di ordine n, nel paragrafo 33 in appendice. In ogni caso la caratterizzazione che segue non viene utilizzata esplicitamente nel resto del paragrafo.

CARATTERIZZAZIONE DELL'INDIPENDENZA DI DUE SOLUZIONI. — *Siano $y_1(x), y_2(x)$ due soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea del secondo* (24.2) *ordine in un intervallo $[a,b]$. Le seguenti condizioni sono fra loro equivalenti:*

(a) *le soluzioni $y_1(x), y_2(x)$ sono indipendenti in $[a,b]$;*

(b) *esiste un punto $x_0 \in [a,b]$ per cui $W(x_0) \neq 0$;*

(c) *$W(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a,b]$.*

Come già detto, non diamo in questo paragrafo la dimostrazione di questa caratterizzazione (che s che l'implicazione $(c) \Rightarrow (b)$ è ovvia, rimarrebbero da provare le implicazioni $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ o, più semplicemente, $(a) \Rightarrow (c)$.

INTEGRALE GENERALE DELLE EQUAZIONI LINEARI OMOGENEE DEL SECONDO ORDINE. — *Siano $y_1(x), y_2(x)$ due soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine* (24.2) *in un intervallo $[a,b]$. Se il determinante wronskiano $W(x)$ di y_1, y_2 è diverso da zero per ogni $x \in [a,b]$, allora l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione* (24.2) *è dato dalla famiglia di funzioni*

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x)\,, \tag{24.7}$$

al variare delle costanti c_1, c_2.

Dimostrazione: sia $u(x)$ una funzione derivabile due volte, soluzione dell'equazione differenziale lineare omogenea (24.2); occorre dimostrare che u si rappresenta nella forma (24.7), cioè occorre dimostrare che esistono due costanti c_1, c_2 tali che

$$u(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)\,. \tag{24.8}$$

Prendiamo in considerazione il sistema in due equazioni, nelle due incognite $c_1(x), c_2(x)$,

$$\begin{cases} c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) = u(x) \\ c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) = u'(x) \end{cases} . \tag{24.9}$$

Per ipotesi, il determinante wronskiano $W(x)$ di y_1, y_2 è diverso da zero per ogni $x \in [a,b]$. Tale determinante wronskiano $W(x)$ è anche il determinante della matrice dei coefficienti del sistema (24.9); per il teorema di Cramer esistono quindi funzioni $c_1(x), c_2(x)$ che soddisfano il sistema (24.9) e che, per la nota formula risolutiva di Cramer, sono funzioni derivabili (perché tali i coefficienti ed i termini noti $u(x), u'(x)$).

Deriviamo entrambi i membri della prima equazione in (24.9). Tenendo anche conto della seconda equazione otteniamo

$$\begin{aligned} u'(x) &= c_1'(x)y_1(x) + c_1(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_2(x)y_2'(x) = \\ &= c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + u'(x)\,, \end{aligned} \tag{24.10}$$

da cui

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0\,. \tag{24.11}$$

Analogamente, derivando entrambi i membri della seconda equazione in (24.9), otteniamo

$$u''(x) = c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_2(x)y_2''(x)\,; \tag{24.12}$$

tenendo conto che $y_1(x), y_2(x)$ sono soluzioni dell'equazione differenziale (24.2) abbiamo

$$\begin{aligned} u''(x) &= c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_2(x)y_2''(x) \\ &= c_1'y_1' + c_2'y_2' - c_1(a_1y_1' + a_0y_1) - c_2(a_1y_2' + a_0y_2) = \\ &= c_1'y_1' + c_2'y_2' - a_1(c_1y_1' + c_2y_2') - a_0(c_1y_1 + c_2y_2)\,, \end{aligned} \tag{24.13}$$

e, ricordando il sistema (24.9),

$$u''(x) = c_1'y_1' + c_2'y_2' - a_1u'(x) - a_0u(x)\,. \tag{24.14}$$

Finalmente, essendo anche $u(x)$ soluzione della stessa equazione differenziale (24.2), risulta $u''(x) = -a_1u'(x) - a_0u(x)$, da cui

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = 0\,. \tag{24.15}$$

Siamo vicini alla conclusione. Infatti le due condizioni (24.11), (24.15) si possono associare nel sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = 0 \end{cases} ; \qquad \forall x \in [a,b]\,; \tag{24.16}$$

il determinante wronskiano $W(x)$ della matrice dei coefficienti è diverso da zero per ipotesi; dato che il sistema è omogeneo, l'unica soluzione è $c_1'(x) = c_2'(x) = 0$. Pertanto $c_1(x) =$ costante $= c_1$, $c_2(x) =$ costante $= c_2$, e vale la formula di rappresentazione che volevamo dimostrare $u(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$.

Osserviamo che la condizione che il determinante wronskiano $W(x)$ delle due soluzioni y_1, y_2 sia diverso da zero ha una rilevante conseguenza nella risoluzione del corrispondente problema di *Cauchy*, di punto iniziale $x_0 \in [a,b]$, con y_0, y_0' numeri reali assegnati,

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases} . \tag{24.17}$$

Infatti sappiamo che l'integrale generale dell'equazione differenziale è dato da $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, al variare delle costanti c_1, c_2. Possiamo quindi trovare una soluzione $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, scegliendo le costanti c_1, c_2 opportunamente, in modo da soddisfare le condizioni

$$\begin{cases} y(x_0) = c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = c_1y'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = y_0' \end{cases} . \tag{24.18}$$

Le costanti c_1, c_2 sono determinabili (ed in modo univoco) perché il sistema (24.18) ha una matrice dei coefficienti il cui determinante è appunto il determinante wronskiano $W(x_0)$, diverso da zero per ipotesi.

Siamo ora in grado di esprimere in forma esplicita *l'integrale generale dell'equazione omogenea* (24.2), cioè l'insieme di tutte le soluzioni di (24.2), nel caso in cui l'equazione abbia i coefficienti $a_1(x), a_0(x)$ *costanti*. Consideriamo quindi l'equazione differenziale

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0\,, \tag{24.19}$$

con coefficienti a_1, a_0 costanti. Si noti che, se interpretate come funzioni, le costanti a_1, a_0 sono definite su tutto $\mathbb{R}$; pertanto esprimeremo le soluzioni dell'equazione (24.19) come insieme di funzioni definite su tutto l'asse reale.

All'equazione (24.19) associamo *l'equazione caratteristica*

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{24.20}$$

che è *un'equazione algebrica di secondo grado* nell'incognita λ, le cui soluzioni sono date da

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}\,, \tag{24.21}$$

nel caso in cui il *discriminante* $\Delta = a_1^2 - 4a_0 > 0$. Naturalmente, se $\Delta = a_1^2 - 4a_0 = 0$, l'equazione caratteristica (24.19) ammette come unica soluzione il numero reale

$$\lambda = -\tfrac{a_1}{2}\,. \tag{24.22}$$

Infine se $\Delta = a_1^2 - 4a_0 < 0$, la (24.19) non ha soluzioni reali, ma ai fini della risoluzione dell'equazione differenziale corrispondente sono utili le quantità

$$\alpha = -\tfrac{a_1}{2}, \qquad \beta = \tfrac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{\sqrt{-a_1^2 + 4a_0}}{2} \tag{24.23}$$

(rispettivamente, *parte reale e coefficiente della parte immaginaria* dei numeri complessi λ_1, λ_2; cioè, con le notazioni dei *numeri complessi*, risulta $\lambda_1 = \alpha - i\beta, \lambda_2 = \alpha + i\beta$).

CARATTERIZZAZIONE DELL'INTEGRALE GENERALE DELLE EQUAZIONI LINEARI OMOGENEE DEL SECONDO ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI. — *Tutte le soluzioni dell'equazione lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti (24.19) sono espresse dalla famiglia di funzioni definite su* $\mathbb{R}$

$$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \qquad \textit{se } \Delta > 0\,, \tag{24.24}$$

$$c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}, \qquad \textit{se } \Delta = 0\,, \tag{24.25}$$

$$c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x, \qquad \textit{se } \Delta < 0\,, \tag{24.26}$$

al variare delle costanti c_1, c_2, dove $\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \alpha, \beta, \Delta$ sono le quantità sopra definite, associate all'equazione caratteristica (24.20).

Dimostrazione: basta applicare il risultato, stabilito precedentemente, di rappresentazione dell'integrale generale dell'equazione omogenea. A tale scopo notiamo che la tesi fornisce nei tre casi l'integrale generale nella forma $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, con $y_1(x), y_2(x)$ funzioni opportune. Verifichiamo quindi che, in tutti e tre i casi, $y_1(x), y_2(x)$ sono due soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine (24.19) e che il determinante wronskiano $W(x)$ di y_1, y_2 è diverso da zero per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Se $\Delta > 0$, l'equazione caratteristica (24.19) ammette due soluzioni reali distinte λ_1, λ_2; in corrispondenza otteniamo le funzioni $y_1(x), y_2(x)$ date da

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \qquad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}\,. \tag{24.27}$$

Verifichiamo che, ad esempio, $y_1(x)$ è una soluzione dell'equazione differenziale. Risulta infatti $y'(x) = \lambda_1 e^{\lambda_1 x}$, $y_1'' = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x}$, da cui

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1 = e^{\lambda_1 x}(\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_0) = 0\,, \tag{24.28}$$

perché λ_1 è una soluzione dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$. Inoltre, il determinante wronskiano $W(x)$ di y_1, y_2 è diverso da zero per ogni $x \in \mathbb{R}$, infatti

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = \\ &= \lambda_2 e^{\lambda_1 x}e^{\lambda_2 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x}e^{\lambda_2 x} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_1 x}e^{\lambda_2 x} \end{aligned} \tag{24.29}$$

e tale quantità è differente da zero perché $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Se $\Delta = 0$, occorre considerare le due funzioni

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, \qquad y_2(x) = x e^{\lambda x}\,, \tag{24.30}$$

con unica λ soluzione (doppia) dell'equazione caratteristica (24.20). Che $y_1(x) = e^{\lambda x}$ sia soluzione dell'equazione differenziale si verifica come fatto sopra. Esaminiamo quindi il caso di $y_2(x) = x e^{\lambda x}$.

Otteniamo $y_2'(x) = e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}$, $y_2''(x) = 2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x}$, da cui

$$\begin{aligned} y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2 &= e^{\lambda x}[2\lambda + \lambda^2 x + a_1(1 + \lambda x) + a_0 x] = \\ &= e^{\lambda x}[(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)x + 2\lambda + a_1]\,. \end{aligned} \tag{24.31}$$

Risulta $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ perché λ è soluzione dell'equazione caratteristica. Inoltre, essendo $\Delta = 0$, risulta

$$\lambda = \frac{-a_1 \pm \sqrt{0}}{2} = -\frac{a_1}{2}\,, \tag{24.32}$$

da cui $2\lambda + a_1 = 0$. Pertanto $y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2 = 0$ e anche $y_2(x)$ è soluzione.

Il determinante wronskiano $W(x)$ di y_1, y_2 è diverso da zero per ogni $x \in \mathbb{R}$, infatti

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)\,. \\ &= e^{\lambda x}(e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}) - \lambda e^{\lambda x} x e^{\lambda x} = e^{2\lambda x} \neq 0\,. \end{aligned} \tag{24.33}$$

Se $\Delta < 0$, le funzioni da prendere in considerazione sono

(24.34) $$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad y_2(x) = e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x .$$

Verifichiamo che, ad esempio, $y_1(x)$ è una soluzione dell'equazione differenziale. Risulta infatti

(24.35) $$y'_1(x) = \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x ,$$

(24.36) $$y''_1 = \alpha^2 e^{\alpha x}\cos\beta x - 2\alpha\beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x - \beta^2 e^{\alpha x}\cos\beta x ,$$

da cui

(24.37) $$\begin{gathered} y''_1 + a_1 y'_1 + a_0 y_1 = \\ = e^{\alpha x}[(\alpha^2 - \beta^2 + a_1\alpha + a_0)e^{\alpha x}\cos\beta x - (2\alpha\beta + \alpha_1\beta)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x] . \end{gathered}$$

Ricordando che

(24.38) $$\alpha = -\frac{a_1}{2}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{\sqrt{-a_1^2 + 4a_0}}{2},$$

risulta inoltre

(24.39) $$\alpha^2 - \beta^2 + a_1\alpha + a_0 = \frac{a_1^2}{4} - \frac{-a_1^2 + 4a_0}{4} - \frac{a_1^2}{2} + a_0 = 0 ,$$

(24.40) $$2\alpha\beta + \beta = \beta(-a_1 + a_1) = 0 ;$$

quindi $y''_1 + a_1 y'_1 + a_0 y_1 = 0$ e la funzione $y_1(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale.

Rimane da provare che il determinante wronskiano $W(x)$ di y_1, y_2 è diverso da zero per ogni $x \in \mathbb{R}$; infatti si ha

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y'_2(x) - y_2(x)y'_1(x) =$$

(24.41) $$\begin{gathered} = e^{\alpha x}\cos\beta x(\alpha e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x) - \\ - e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x(\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x) = \\ = \beta e^{2\alpha x}(\cos^2\beta x + \operatorname{sen}^2\beta x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0 \end{gathered}$$

perché $\beta = \sqrt{-\Delta}/2 \neq 0$.

Terminiamo il paragrafo esaminando come applicare su degli esempi la caratterizzazione, sopra provata, dell'integrale generale delle equazioni lineari omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti.

Esempio. Risolviamo le seguenti equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti

(24.42) $$y'' - 2y = 0 ;$$

(24.43) $$y'' + 2y' = 0 ;$$

(24.44) $$y'' - 2y' + y = 0 ;$$

(24.45) $$y'' + 2y = 0 ;$$

L'equazione differenziale (24.42) ha come corrispondente equazione caratteristica l'equazione algebrica di secondo grado nell'incognita λ

(24.46) $$\lambda^2 - 2 = 0 ,$$

che ammette le due radici reali distinte $\lambda = \pm\sqrt{2}$. In corrispondenza l'equazione differenziale (24.42) ha come integrale generale la famiglia di soluzioni (si veda anche la figura 3.8), al variare delle costanti reali c_1, c_2,

(24.47) $$y(x) = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} .$$

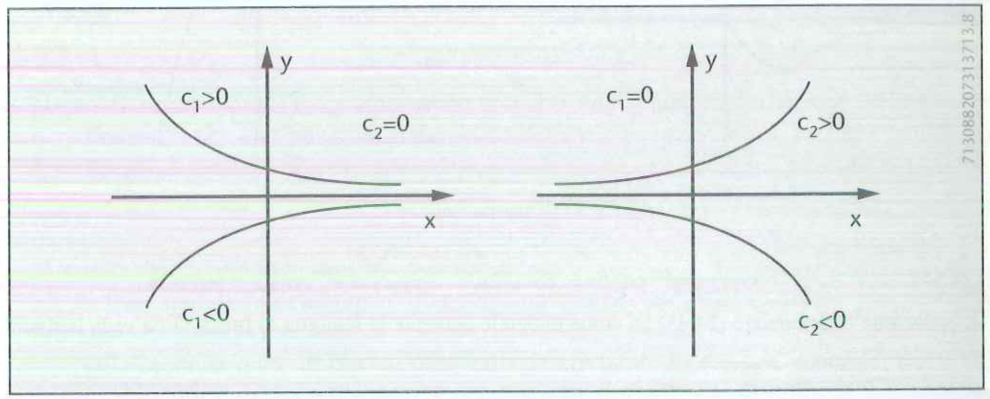

Figura 3.8

L'equazione differenziale (24.43) ha come equazione caratteristica l'equazione di secondo grado

(24.48) $$\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda + 2) = 0 ,$$

che ammette le due radici reali distinte, date da $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$. Pertanto l'equazione differenziale (24.43) ha come integrale generale la famiglia di funzioni $y = y(x)$, al variare delle costanti reali c_1, c_2,

(24.49) $$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 .$$

Invece l'equazione differenziale (24.44) ha come corrispondente equazione caratteristica l'equazione algebrica

(24.50) $$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 .$$

Siamo nel caso $\Delta = 0$; l'equazione caratteristica ammette la radice (doppia) $\lambda = 1$ e l'equazione differenziale (24.44) ha come integrale generale la famiglia di soluzioni

(24.51) $$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x ,$$

al variare delle costanti reali c_1, c_2 (come in figura 3.9).

Infine l'equazione differenziale (24.45) ha come equazione caratteristica l'equazione di secondo grado

$$\lambda^2+2=0, \tag{24.52}$$

che non ammette radici reali. Essendo $\Delta<0$, occorre calcolare le quantità

$$\alpha=-\frac{a_1}{2}=0, \qquad \beta=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\sqrt{2}, \tag{24.53}$$

e, in corrispondenza, le due soluzioni

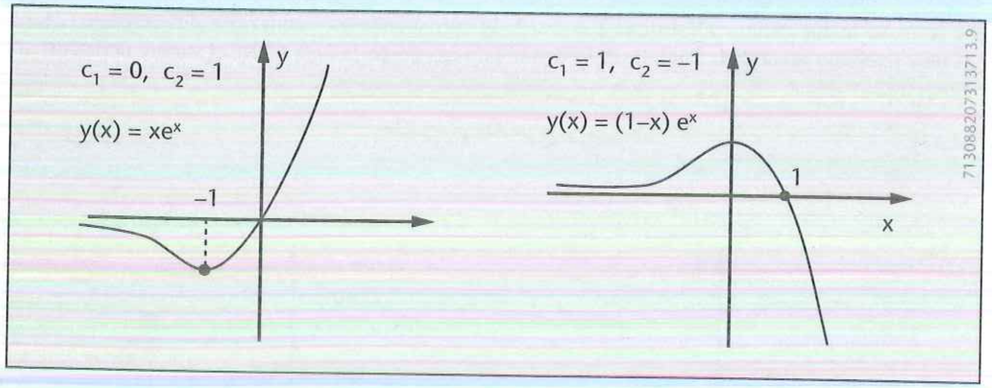

Figura 3.9

$$y_1(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x=\cos\sqrt{2}x, \qquad y_2(x)=e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x=\operatorname{sen}\sqrt{2}x. \tag{24.54}$$

L'equazione differenziale (24.45) ha come integrale generale la famiglia di funzioni (si veda la figura

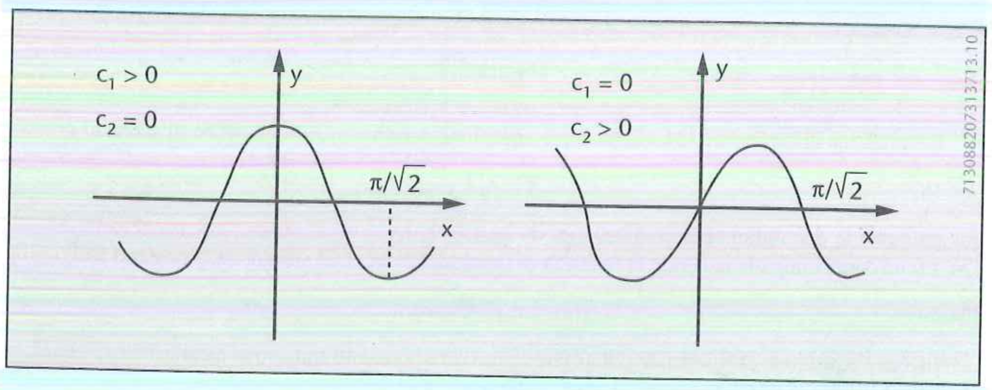

Figura 3.10

3.10), al variare delle costanti reali c_1, c_2,

$$y(x)=c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\operatorname{sen}\sqrt{2}x. \tag{24.55}$$

25. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine non omogenee

Siano $a_1(x)$, $a_0(x)$, $g(x)$ funzioni continue in un intervallo $[a,b]$. Come mostrato nel paragrafo 22, l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale lineare non omogenea del secondo ordine

$$y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=g(x) \tag{25.1}$$

si rappresenta considerando l'equazione omogenea associata

$$y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0. \tag{25.2}$$

Infatti l'integrale generale dell'equazione differenziale (25.1) è dato dall'integrale generale della equazione omogenea (25.2), sommato ad una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (25.1).

Se $y_1(x), y_2(x)$ sono due soluzioni dell'equazione omogenea (25.2) in $[a,b]$, con determinante wronskiano $W(x)$ di y_1, y_2 diverso da zero per ogni $x\in[a,b]$, allora l'integrale generale dell'equazione (25.2) è dato dalla famiglia di funzioni

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x), \tag{25.3}$$

al variare delle costanti c_1, c_2. Indicando con $\overline{y}(x)$ *una* soluzione particolare dell'equazione non omogenea (25.1), l'integrale generale dell'equazione data (25.1) si esprime quindi nella forma

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\overline{y}(x), \tag{25.4}$$

al variare delle costanti $c_1, c_2\in\mathbb{R}$.

Rimane quindi da determinare *una* soluzione particolare dell'equazione non omogenea (25.1).

Nella seconda parte di questo paragrafo descriviamo un metodo generale, detto della *variazione delle costanti* e dovuto a Lagrange, che consente di determinare una soluzione particolare $\overline{y}(x)$ dell'equazione non omogenea, a partire da due integrali linearmente indipendenti y_1, y_2 dell'equazione omogenea associata.

Comunque osserviamo preliminarmente che esistono dei casi particolari in cui è possibile determinare in modo diretto una soluzione. Esaminiamo di seguito alcuni esempi.

Esempio 1. Determiniamo l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea

$$y''+2y'+y=x^2+4x-1. \tag{25.5}$$

Come indicato nel paragrafo precedente, si verifica che l'equazione omogenea associata ammette integrale generale dato da

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}, \tag{25.6}$$

al variare delle costanti c_1, c_2. Dato che il secondo membro dell'equazione (25.5) è un polinomio, ricerchiamo una soluzione particolare $\overline{y}(x)$ di tale equazione non omogenea sotto forma di polinomio, con coefficienti da determinare, della forma

$$\overline{y}(x)=ax^2+bx+c \tag{25.7}$$

Derivando si ottiene

$$\bar{y}'(x) = 2ax + b, \qquad \bar{y}''(x) = 2a\,, \tag{25.8}$$

e, sostituendo nell'equazione (25.5),

$$\begin{aligned} \bar{y}'' + 2\bar{y}' + \bar{y} &= 2a + 4ax + 2b + ax^2 + bx + c \\ &= 2a + 2b + c + (4a + b)x + ax^2\,. \end{aligned} \tag{25.9}$$

Affinché $\bar{y}'' + 2\bar{y}' + \bar{y}$ sia uguale al secondo membro $g(x) = x^2 + 4x - 1$ nell'equazione differenziale data, occorre che siano soddisfatte le condizioni

$$\begin{cases} 2a + 2b + c = -1 \\ 4a + b = 4 \\ a = 1 \end{cases}, \tag{25.10}$$

le quali permettono di determinare i coefficienti incogniti $a = 1$, $b = 0$, $c = -3$. Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale (25.5) è il seguente

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \bar{y}(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + x^2 - 3\,, \tag{25.11}$$

al variare delle costanti $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Il metodo proposto nell'esempio 1 si applica anche ad altri casi con delle eccezioni che in questa sede non esaminiamo. Ad esempio, quando il termine noto è della forma

$$\begin{aligned} g(x) &= \alpha \operatorname{sen} x + \beta \cos x\,, \\ g(x) &= e^{\alpha x}\,, \\ g(x) &= \text{polinomio} \cdot (\alpha \operatorname{sen} x + \beta \cos x)\,, \\ g(x) &= \text{polinomio} \cdot e^{\alpha x}\,. \end{aligned} \tag{25.12}$$

Esempio 2. Determiniamo l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y' + 2y = 2\cos x\,. \tag{25.13}$$

Con i metodi del paragrafo precedente si verifica che l'equazione omogenea associata ammette integrale generale dato da

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + c_2 e^{-x/2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{7}}{2} x\,, \tag{25.14}$$

al variare delle costanti c_1, c_2. Dato che il secondo membro dell'equazione (25.13) è del tipo $\alpha \operatorname{sen} x + \beta \cos x$, ricerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}(x)$ sotto la forma

$$\bar{y}(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x\,, \tag{25.15}$$

con coefficienti a, b da determinare. Derivando si ottiene

$$\bar{y}'(x) = a\cos x - b \operatorname{sen} x \qquad \bar{y}''(x) = -a \operatorname{sen} x - b\cos x\,, \tag{25.16}$$

e, sostituendo nell'equazione (25.13),

$$\begin{aligned} \bar{y}'' + \bar{y}' + 2\bar{y} &= -a \operatorname{sen} x - b\cos x + a\cos x - b \operatorname{sen} x + 2a \operatorname{sen} x + 2b\cos x = \\ &= (a - b)\operatorname{sen} x + (a + b)\cos x\,. \end{aligned} \tag{25.17}$$

Affinché $\bar{y}'' + \bar{y}' + 2\bar{y}$ sia uguale al secondo membro $g(x) = 2\cos x$ nell'equazione differenziale (25.13), debbono risultare soddisfatte le condizioni

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 2 \end{cases}, \tag{25.18}$$

le quali forniscono i valori $a = 1$, $b = 1$. Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale (25.13) è il seguente

$$\begin{aligned} &c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \bar{y}(x) = \\ &= c_1 e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + c_2 e^{-x/2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{7}}{2} x + \operatorname{sen} x + \cos x\,, \end{aligned} \tag{25.19}$$

al variare delle costanti $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Consideriamo ora il metodo della *variazione delle costanti* per determinare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea a partire da due integrali linearmente indipendenti y_1, y_2 dell'equazione omogenea associata. Come in precedenza, studiamo l'equazione lineare del secondo ordine

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)\,, \tag{25.20}$$

con $a_1(x), a_0(x), g(x)$ funzioni continue in $[a,b]$. Siano $y_1(x), y_2(x)$ due soluzioni in $[a,b]$ dell'equazione omogenea associata; cioè sia in $[a,b]$

$$y_i'' + a_1(x)y_i' + a_0(x)y_i = 0\,, \qquad i = 1,2\,. \tag{25.21}$$

Supponiamo che $y_1(x), y_2(x)$ abbiano determinante wronskiano diverso da zero. Cerchiamo una soluzione della (25.20) sotto la forma

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2\,, \tag{25.22}$$

con $c_1(x), c_2(x)$ funzioni derivabili in $[a,b]$, da determinare. Imponiamo su $c_1(x), c_2(x)$ la condizione che la funzione *si possa derivare come se le $c_i(x)$ fossero costanti*, cioè in modo che

$$y' = c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2'\,; \tag{25.23}$$

ciò equivale ad imporre che

$$c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0\,. \tag{25.24}$$

Derivando rispetto ad x la (25.23) si ottiene

$$y'' = c_1(x)y_1'' + c_2(x)y_2'' + c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' \,. \tag{25.25}$$

Pertanto la funzione y data dalla (25.22) risolve l'equazione (25.20) se e soltanto se

$$\begin{aligned} c_1(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1) + c_2(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2) + \\ + c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = g(x) \,, \end{aligned} \tag{25.26}$$

e quindi, per le (25.21), se e solo se

$$c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = g(x) \,. \tag{25.27}$$

Il sistema costituito dalla (25.24) e dalla (25.27)

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_1'(x)y_2 = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = g(x) \end{cases} , \tag{25.28}$$

considerato nelle incognite $c_1'(x), c_2'(x)$, ha soluzione unica perché il suo determinante è il wronskiano $W(x)$ di y_1 e y_2, che, per ipotesi, è diverso da zero. Le soluzioni sono, per la regola di Cramer,

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ g(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)} \,, \tag{25.29}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & g(x) \end{vmatrix}}{W(x)} \,. \tag{25.30}$$

Esempio 3. Applichiamo il metodo di Lagrange all'equazione lineare non omogenea del secondo ordine

$$y'' + y = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \,. \tag{25.31}$$

Poiché l'equazione omogenea associata ammette i due integrali linearmente indipendenti

$$y_1(x) = \cos x, \qquad y_2(x) = \operatorname{sen} x \,, \tag{25.32}$$

cerchiamo una soluzione particolare della (25.31) sotto la forma

in modo che le derivate $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$ delle funzioni c_1 e c_2 da determinare soddisfino il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\operatorname{sen} x = 0 \\ -c_1'(x)\operatorname{sen} x + c_2'(x)\cos x = 1/\operatorname{sen} x \end{cases} . \tag{25.34}$$

Risolvendo con la regola di Cramer, si trova

$$c_1'(x) = -1, \qquad c_2'(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \,, \tag{25.35}$$

ed integrando $c_1(x) = -x$, $c_2(x) = \log|\operatorname{sen} x|$. Pertanto un integrale particolare dell'equazione (25.31) è dato da

$$y(x) = -x\cos x + \operatorname{sen} x \cdot \log|\operatorname{sen} x| \,. \tag{25.36}$$

26. Il teorema di Cauchy di esistenza e unicità locale

Iniziamo da questo paragrafo lo studio di equazioni differenziali *non lineari*. Abbiamo già osservato nell'introduzione al presente capitolo che, per una generica equazione differenziale *non* lineare, non è ragionevole aspettarsi in generale che una o più soluzioni siano definite in un intervallo *assegnato a priori*, ma che invece le soluzioni risultano definite soltanto in un intorno di un punto iniziale assegnato.

Ci poniamo quindi il problema della *risoluzione locale*, o *in piccolo*, di una data equazione differenziale non lineare. Cioè determineremo l'esistenza, o una rappresentazione esplicita, di una o più soluzioni *in un intorno del punto* x_0 contenuto nell'intervallo dove l'equazione è definita.

Dimostriamo in questo paragrafo il *teorema di Cauchy*, di esistenza e unicità locale, per una equazione differenziale del primo ordine, in forma normale, del tipo

$$y' = f(x,y) \,. \tag{26.1}$$

Fissati due numeri reali x_0 e y_0, supponiamo che la funzione f sia definita in un intorno rettangolare $I \times J$ del punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ (come in figura 3.11), di espressione analitica

$$I \times J = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \le a, \ |y - y_0| \le b\} \,, \tag{26.2}$$

essendo $a, b > 0$ numeri reali fissati e I, J gli intervalli in $\mathbb{R}$

$$I = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \le a\}, \qquad J = \{y \in \mathbb{R} : |y - y_0| \le b\} \,. \tag{26.3}$$

Supponiamo inoltre che

$$f(x,y) \ \text{ sia } \textit{continua} \text{ nel rettangolo } I \times J \tag{26.4}$$

e che sia *Lipschitziana* rispetto a y uniformemente per $x \in I$, nel senso che esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2| \,, \qquad \forall x \in I, \ \forall y_1, y_2 \in J \tag{26.5}$$