Questo problema, affrontato in tutta la sua generalità, comporta sviluppi assai elevati ed in questo Capitolo ci limiteremo a studiarlo *nel caso particolare in cui la funzione data $f(x)$ sia continua*. Con tale ipotesi arriveremo a dimostrare l'esistenza delle primitive, dando in pari tempo un metodo per calcolarle. La dimostrazione, che esporremo nel § 10.6, è fondata sull'introduzione del concetto di *integrale* cui sono dedicati i § 10.2-10.5.

10.2 Integrale di una funzione continua esteso ad un intervallo

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$. Operiamo una decomposizione $\mathcal{D}$ di $[a, b]$ in un numero arbitrario n di intervalli parziali $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-2}, x_{n-1}], [x_{n-1}, x_n]$ mediante i punti $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ scelti sotto la sola condizione che risulti

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Poniamo $\delta = \max(x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1})$; tale numero positivo $\delta \leq b - a$ sarà chiamato la *norma* della decomposizione $\mathcal{D}$. È ben evidente che esistono infinite decomposizioni $\mathcal{D}$ aventi una norma assegnata $\delta < b - a$.

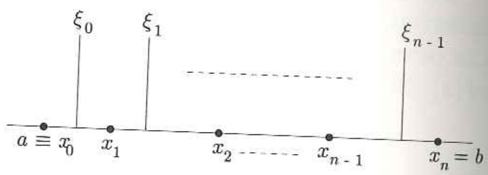

Fig. 10.2.1

Fissiamo poi ad arbitrio un punto $\xi_0 \in [x_0, x_1]$, un punto $\xi_1 \in [x_1, x_2]$, $\ldots$, un punto $\xi_{n-1} \in [x_{n-1}, x_n]$ e calcoliamo la somma

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i)\,, \tag{10.2.1}$$

che chiameremo una *somma integrale* relativa alla $f(x)$ ed all'intervallo $[a, b]$. Conviene osservare due modi particolari di scegliere i punti ξ_i. In ciascuno degli intervalli $[x_i, x_{i+1}]$ la $f(x)$ è dotata di minimo assoluto m_i e di massimo assoluto M_i e noi possiamo scegliere in ciascun $[x_i, x_{i+1}]$ il punto ξ_i nel punto (o in uno dei punti) ove la $f(x)$ assume il corrispondente minimo valore m_i, oppure il corrispondente massimo valore M_i. Così facendo otteniamo le due seguenti particolari somme integrali:

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) m_i\,, \qquad S = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) M_i\,; \tag{10.2.2}$$

confrontandole con la generica somma (10.2.1) è evidente che *in corrispondenza ad una medesima decomposizione $\mathcal{D}$ di $[a, b]$ risulta*

$$s \leq \sigma \leq S\,. \tag{10.2.3}$$

Le somme integrali s, S dipendono soltanto dalla decomposizione $\mathcal{D}$, mentre una generica σ dipende, oltre che dalla $\mathcal{D}$, anche dalla scelta dei punti ξ_i. Non possiamo dire che tali somme siano funzioni della norma δ della decomposizione $\mathcal{D}$ perché, come si è già osservato, esistono infinite decomposizioni $\mathcal{D}$ con la medesima norma e quindi ad un fissato δ vengono in generale a corrispondere infiniti valori della somma integrale σ (ed, in particolare, della s e della S). Possiamo tuttavia considerare σ come *una funzione ad infiniti valori* della variabile δ, definita al variare di δ nell'intervallo $(0, b-a]$, il quale ha 0 come punto di accumulazione.

La definizione di limite, data per *funzioni ad un sol valore*, si può immediatamente estendere a *funzioni a più valori* nel modo seguente: se $f(x)$ è una funzione a più (eventualmente infiniti) valori, definita in un insieme E avente x_0 come punto di accumulazione, la scrittura $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ significa che, $\forall\, \varepsilon > 0$, esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni punto $x \in E$ verificante la $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, *tutti i corrispondenti valori* $f(x)$ verificano la $|f(x) - l| < \varepsilon$.

È subito visto che *valgono ancora il teorema di unicità del limite e le altre proprietà esposte nel* Cap. 7.

Adottando questa estensione del concetto di limite, sussiste il seguente fondamentale teorema:

Teorema 10.2.I – *Nelle ipotesi poste, considerata la somma integrale σ come funzione ad infiniti valori della norma $\delta > 0$ della decomposizione $\mathcal{D}$, esiste*

$$\lim_{\delta\to 0} \sigma = l\,, \qquad l \in \mathbb{R}\,,$$

nel senso che, $\forall\, \varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni decomposizione $\mathcal{D}$ di norma $\delta < \delta_\varepsilon$, tutte le corrispondenti σ verificano la $|\sigma - l| < \varepsilon$(1).

Dimostrazione – Divideremo la dimostrazione in tre parti.

1ª parte) Consideriamo una decomposizione $\mathcal{D}$ dell'intervallo $[a,b]$ e le corrispondenti somme s, S date da (10.2.2). Consideriamo poi un'altra decomposizione $\mathcal{D}^*$ che sia *successiva* alla $\mathcal{D}$, nel senso che sia ottenuta da $\mathcal{D}$ aggiungendo qualche nuovo punto di suddivisione (fig. 10.2.2); siano s^*, S^* le corrispondenti somme analoghe alle (10.2.2). *Vogliamo dimostrare che si ha*

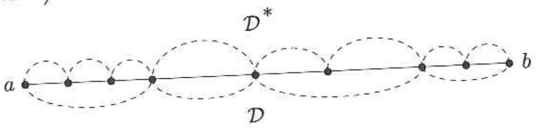

Fig. 10.2.2

$$s^* \geq s\,, \quad S^* \leq S\,. \tag{10.2.4}$$

Basterà evidentemente far vedere che, partendo dalla decomposizione $\mathcal{D}$, l'inserimento di un nuovo punto di suddivisione in un qualsiasi intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ provoca un aumento (o almeno una non diminuzione) della somma s ed una diminuzione (o almeno un non aumento) della somma S.

(1) Al tendere a zero di δ, tende all'infinito il numero n degli intervalli parziali $[x_i, x_{i+1}]$ della decomposizione $\mathcal{D}$, ma non viceversa; non si può quindi dire che si passa al limite per $n \to \infty$.

Ed infatti l'intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ contribuisce in s col termine $(x_{i+1} - x_i)m_i$. Se in $[x_i, x_{i+1}]$ si colloca un nuovo punto di suddivisione X, in luogo del predetto contributo $(x_{i+1} - x_i)m_i$, si avrà quest'altro $(X - x_i)m'_i + (x_{i+1} - X)m''_i$, ove m'_i è il minimo di $f(x)$ in $[x_i, X]$ e m''_i il minimo di $f(x)$ in $[X, x_{i+1}]$. Ma si ha evidentemente $m'_i \geq m_i$, $m''_i \geq m_i$ e quindi

$$(X - x_i)m'_i + (x_{i+1} - X)m''_i \geq (X - x_i)m_i + (x_{i+1} - X)m_i = (x_{i+1} - x_i)m_i\,;$$

pertanto si ha effettivamente una non diminuzione della somma s.

Analogamente, nella somma S si ha dapprima il contributo $(x_{i+1} - x_i)M_i$ e poi il contributo $(X - x_i)M'_i + (x_{i+1} - X)M''_i$, essendo M'_i, M''_i rispettivamente i massimi di $f(x)$ in $[x_i, X]$, $[X, x_{i+1}]$. Poiché $M'_i \leq M_i$, $M''_i \leq M_i$, risulta,

$$(X - x_i)M'_i + (x_{i+1} - X)M''_i \leq (X - x_i)M_i + (x_{i+1} - X)M_i = (x_{i+1} - x_i)M_i\,,$$

cosicché la somma S non aumenta.

2^a parte) Se in corrispondenza a tutte le possibili decomposizioni $\mathcal{D}$ di $[a, b]$ si calcola la somma s, si ottiene una classe di numeri che indicheremo con $\{s\}$; analogamente per le somme S che generano una classe $\{S\}$. Vogliamo dimostrare che *queste due classi* $\{s\}$, $\{S\}$ *sono contigue*, vale a dire che (§ 2.2):

α) *ogni numero della classe* $\{s\}$ *è minore od uguale ad ogni numero della classe* $\{S\}$;

β) $\forall\ \varepsilon > 0$, *esiste un numero di* $\{S\}$ *ed un numero di* $\{s\}$ *la cui differenza è minore di* ε.

Dimostriamo la proposizione α*)* Si osservi anzitutto che essa non è evidente come può sembrare a prima vista. Infatti se è ovvio che, per due somme s, S *provenienti dalla medesima decomposizione* $\mathcal{D}$, si ha $s \leq S$, non è affatto chiaro che, *considerate due arbitrarie decomposizioni* $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ e dette s la somma coi minimi che corrisponde alla $\mathcal{D}$, S' la somma coi massimi che corrisponde alla $\mathcal{D}'$ risulti

$$s \leq S'\,. \tag{10.2.5}$$

Tuttavia la (10.2.5) si dimostra facilmente, valendosi di quanto si è detto nella 1^a parte della dimostrazione. Infatti esiste certamente una terza decomposizione $\mathcal{D}^*$ che sia *successiva* tanto a $\mathcal{D}$ quanto a $\mathcal{D}'$; è tale per esempio quella che si genera considerando simultaneamente tutti i punti di suddivisione inerenti a $\mathcal{D}$ e tutti quelli inerenti a $\mathcal{D}'$ (fig. 10.2.3). Dette s^*, S^* le solite somme che corrispondono a $\mathcal{D}^*$, si ha per le (10.2.4):

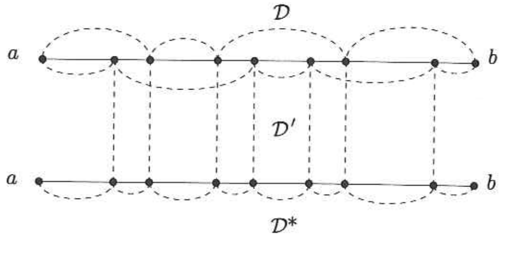

Fig. 10.2.3

$$s^* \geq s\,, \qquad S^* \leq S'\,;$$

d'altra parte vale la $s^* \leq S^*$ e quindi si può scrivere

$$s \leq s^* \leq S^* \leq S',$$

donde segue la (10.2.5).

Dimostriamo la proposizione β) Dato $\varepsilon > 0$, per il teorema di Heine-Cantor 8.5.III applicato alla $f(x) \in C^0[a,b]$, esiste un δ_ε tale che, presi in $[a,b]$ due punti qualsiasi x', x'' verificanti la $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$, riesca $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/(b-a)$.

Consideriamo allora una *qualunque decomposizione* $\mathcal{D}$ di $[a,b]$ *che abbia norma* $\delta < \delta_\varepsilon$. È evidente che in *ogni* suo intervallo parziale $[x_i, x_{i+1}]$ risulta $M_i - m_i < \varepsilon/(b-a)$, dimodoché per le somme s, S che corrispondono ad una siffatta $\mathcal{D}$ risulta

$$\begin{aligned} S - s &= \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)(M_i - m_i) < \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)\varepsilon/(b-a) = \\ &= \left[\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)\right] \cdot \varepsilon/(b-a) = (b-a) \cdot \varepsilon/(b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

3ª parte) Stabilito che le classi $\{s\}$, $\{S\}$ sono contigue, diciamo l il loro numero di separazione e dimostriamo che *esso è proprio il limite cui, per $\delta \to 0$, tendono le somme integrali σ.*

Infatti si è visto poco sopra che, $\forall\ \varepsilon > 0$, esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che *ogni* decomposizione $\mathcal{D}$ di norma $\delta < \delta_\varepsilon$ genera due somme s, S verificanti la

$$S - s < \varepsilon. \tag{10.2.6}$$

D'altra parte si ha

$$s \leq l \leq S, \tag{10.2.7}$$

mentre, per ogni somma integrale σ corrispondente a tali decomposizioni $\mathcal{D}$, sussiste la (10.2.3). Da (10.2.3), (10.2.6), (10.2.7) segue $|\sigma - l| \leq S - s < \varepsilon$, cosicché resta provato che non appena sia $\delta < \delta_\varepsilon$ si ha sempre $|\sigma - l| < \varepsilon$. □

Il limite l, di cui il teorema precedente assicura l'esistenza, è un numero che dipende dalla funzione continua f e dall'intervallo $[a,b]$; esso si chiama l'*integrale della funzione f esteso all'intervallo* $[a,b]$ e si indica con la notazione

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{10.2.8}$$

Si ha dunque per definizione (e col solito significato dei simboli):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0} \sigma = \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f(\xi_i) \tag{10.2.9}$$

ed in particolare

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0} s = \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) m_i \,,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0} S = \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) M_i \,.$$

E poiché l'integrale (10.2.8) coincide con il numero di separazione delle due classi $\{s\}$, $\{S\}$ sopra considerate, possiamo aggiungere:

Teorema 10.2.II – *L'integrale $\int_a^b f(x)dx$ coincide con l'estremo superiore dell'insieme costituito da tutte le possibili somme s e con l'estremo inferiore dell'insieme formato da tutte le possibili somme S. Pertanto le somme s danno valori approssimati per difetto dell'integrale, le somme S ne danno valori approssimati per eccesso.*

Per giustificare la notazione (10.2.8) adottata per l'integrale, possiamo osservare che essa rammenta in un certo senso la definizione (10.2.9) e cioè che l'integrale è il limite di una somma di prodotti di valori della funzione [i valori $f(\xi_i)$] per incrementi o differenziali della variabile [le differenze $x_{i+1} - x_i$]. Tant'è vero che spesso nelle applicazioni la definizione d'integrale viene *inesattamente* formulata nel modo seguente: si decompone $[a, b]$ in intervalli infinitesimi di ampiezza dx, si moltiplica l'ampiezza dx di ogni intervallo per il valore della funzione in un punto x dell'intervallo stesso e si sommano tutti i prodotti ottenuti (indicando la somma col simbolo $\int_a^b$). È superfluo rilevare l'imprecisione di questo modo d'esprimersi (fra l'altro, si omette di citare l'occorrente passaggio al limite); però esso è largamente usato.

Circa il calcolo effettivo dell'integrale (10.2.8) possiamo dire per ora che, in ogni caso, se ne possono ottenere valori comunque approssimati per mezzo delle somme integrali σ, s, S calcolate in corrispondenza a decomposizioni di $[a, b]$ (in intervalli parziali molto piccoli), scelte di volta in volta in modo da rendere più agevoli i calcoli. La (10.2.9) riguardando il limite di funzione ad infiniti valori, garantisce che il risultato del passaggio al limite non dipende dalla particolare decomposizione scelta, purché di norma $\delta \to 0$. Dal successivo sviluppo della teoria, risulteranno però metodi più rapidi di calcolo.

10.3 Significato geometrico dell'integrale

All'integrale di una funzione continua $f(x)$ esteso ad un intervallo $[a, b]$ si può dare un notevole significato geometrico *quando si supponga che nell'intervallo $[a, b]$ si abbia sempre $f(x) \geq 0$.* Costruito il grafico della funzione (situato nel semipiano $y \geq 0$), si può considerare l'insieme piano $T = \{(x, y) | a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ (vedi fig. 10.3.1), cioè la regione limitata dall'asse x, dalla curva $y = f(x)$ e dalle rette $x = a$, $x = b$. Essa sarà chiamata *rettangoloide (o trapezoide) avente per* *base l'intervallo* $[a, b]$ *e relativo alla funzione* $f(x)$.

Vogliamo definire che cosa debba intendersi per *area* del rettangoloide T. A tale scopo, effettuata una decomposizione $\mathcal{D}$ di $[a, b]$, calcoliamo le somme s, S considerate nel § 10.2:

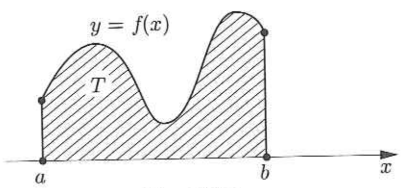

Fig. 10.3.1

$$s = (x_1 - x_0)m_0 + (x_2 - x_1)m_1 + \ldots + (x_n - x_{n-1})m_{n-1} ,$$
$$S = (x_1 - x_0)M_0 + (x_2 - x_1)M_1 + \ldots + (x_n - x_{n-1})M_{n-1} ,$$

che ora sono certamente non negative. È evidente dalla fig. 10.3.2 a) (in cui $n = 3$) che la s rappresenta la somma delle aree dei rettangoli $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ che ricoprono una regione T' (detta *scaloide iscritto in* T) contenuta nel rettangoloide T, mentre la S rappresenta la somma delle aree dei rettangoli $R_0, R_1, \ldots, R_{n-1}$ di fig. 10.3.2 b) che ricoprono una regione T'' (detta *scaloide circoscritto a* T) contenente il rettangoloide T.

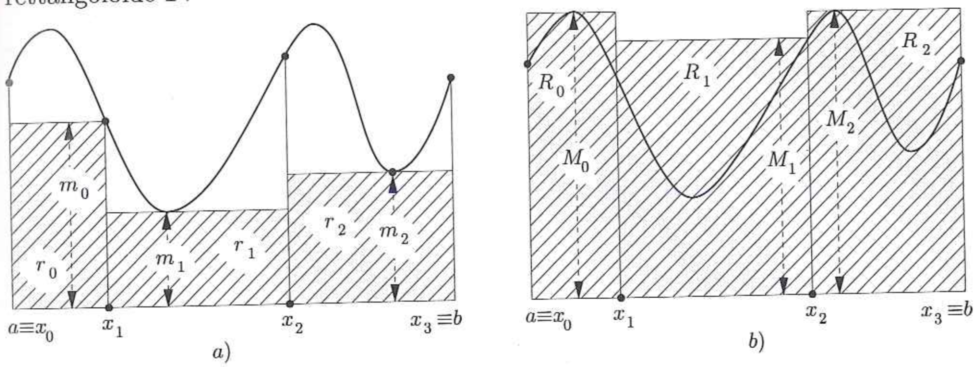

Fig. 10.3.2

È chiaro allora che, volendo definire l'area di T, conviene fare in modo che essa risulti $\geq s$ e $\leq S$ e ciò, non soltanto per una particolare decomposizione $\mathcal{D}$ di $[a, b]$, ma per tutte le possibili decomposizioni. Questa considerazione ci porta ovviamente a definire l'area di T come il numero di separazione fra le due classi contigue $\{s\}$, $\{S\}$ considerate nel § 10.2. Ma sappiamo che tale numero di separazione è proprio l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ e perciò possiamo concludere col seguente enunciato:

Teorema 10.3.I – *L'area del rettangoloide* T*, definita come numero di separazione fra le classi contigue costituite dalle aree degli scaloidi iscritti e dalle aree degli scaloidi circoscritti, è uguale all'integrale della* $f(x)$ *(continua e non negativa) esteso all'intervallo* $[a, b]$.

Avremo occasione di constatare nel § 10.12 che questo teorema fa ritrovare le aree già note, per altra via, dalla Geometria elementare.

Si tenga presente che qui si è supposto $f(x) \geq 0$ in $[a, b]$; il caso in cui la $f(x)$ cambi segno in $[a, b]$ sarà esaminato nel § successivo.