Analoghi enunciati valgono ovviamente sostituendo il segno $>$ con $<$ e il segno $\geq$ con $\leq$.

Terminiamo il paragrafo con la definizione di limite di una funzione all'infinito. Mentre, per una funzione f di una variabile, abbiamo dato nel volume 1 la definizione di

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x),$$

nel caso di funzioni di n variabili non è così ovvio cosa significhi che la variabile indipendente $\mathbf{x}$ tende a infinito: anche nel caso di funzioni di due sole variabili (x, y), è chiaro che un punto del piano può "andare all'infinito" lungo infinite direzioni diverse e la funzione $f(x, y)$ potrebbe avere comportamenti diversi, a priori, in ciascuna di queste direzioni. La definizione che daremo, invece, richiede che la funzione abbia un comportamento uniforme, al tendere di $|\mathbf{x}|$ a $+\infty$, indipendentemente dalla direzione. Precisamente:

Definizione 3.4 Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione definita in tutto lo spazio, o almeno per $|\mathbf{x}|$ abbastanza grande. Si dice che

$$\lim_{|\mathbf{x}| \to \infty} f(\mathbf{x}) = L \in \mathbb{R} \text{ se}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0 \text{ tale che } \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \text{ se } |\mathbf{x}| > R \text{ allora } |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon.$$

Si dice che

$$\lim_{|\mathbf{x}| \to \infty} f(\mathbf{x}) = +\infty \qquad (\text{o } -\infty) \text{ se}$$

$$\forall K > 0 \ \exists R > 0 \text{ tale che } \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \text{ se } |\mathbf{x}| > R \text{ allora } f(\mathbf{x}) > K$$

(rispettivamente $f(\mathbf{x}) < -K$).

2.2 Calcolo dei limiti in più variabili: analisi delle forme di indeterminazione

Presenteremo ora, mediante esempi, alcune idee fondamentali per l'analisi delle forme di indeterminazione nel calcolo dei limiti delle funzioni di più variabili. Premettiamo un'osservazione sulla definizione di limite. Supponiamo che f abbia limite L finito per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. L'essenza della definizione sta nel fatto che $f(\mathbf{x})$ si avvicina indefinitamente a L quando la *distanza* tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_0$ tende a zero, indipendentemente dalla *direzione* con cui $\mathbf{x}$ si avvicina a $\mathbf{x}_0$. I seguenti esempi illustrano due tecniche tipiche che si usano per dimostrare, rispettivamente, l'esistenza o la non esistenza di un limite.

Restrizione di una funzione a una curva e non esistenza del limite

Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione reale di n variabili, $\mathbf{r} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è un arco di curva in $\mathbb{R}^n$ ed esiste la funzione composta

$$g(t) = f(\mathbf{r}(t)),$$

... *restrizione di f alla curva* $\mathbf{r}$ ed è una funzione reale di variabile reale.

cui è definita f, ci restringiamo ai punti di $\mathbb{R}^n$ che stanno sull'arco di curva $\mathbf{r}(t)$. È chiaro che, se l'arco di curva è continuo e f è continua, anche la sua restrizione g all'arco di curva sarà continuo (continuità della funzione composta). Essendo funzioni di una variabile, le restrizioni sono facili da studiare; l'idea è di ottenere informazioni sul comportamento di f esaminando le sue restrizioni a curve differenti.

In particolare, per mostrare che il limite per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ di una certa funzione $f(\mathbf{x})$ *non esiste* è sufficiente determinare due curve che passano da $\mathbf{x}_0$, lungo le quali la funzione tende a due limiti diversi. La stessa conclusione vale se la restrizione di $f(\mathbf{x})$ a *una* particolare curva non ammette limite.

Esempio

2.2 Calcolare

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Il limite non esiste. Infatti, la restrizione di $f(x, y)$ alla retta $y = x$ è

$$f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

perciò tende a $\frac{1}{2}$. Invece, la restrizione di $f(x, y)$ alla retta $y = -x$ è

$$f(x, -x) = \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2},$$

perciò tende a $-\frac{1}{2}$. Essendo i due limiti diversi, il limite di f non esiste.

Questo è il metodo comunemente seguito per dimostrare che una funzione di più variabili non ammette limite. Si badi che, per questa via, non si può invece dimostrare l'*esistenza* del limite. Per esempio, l'esistenza non è garantita dal fatto che lungo qualsiasi retta uscente dall'origine f abbia lo stesso limite, come mostreranno altri esempi.

Uso di maggiorazioni con funzioni radiali per provare l'esistenza del limite

Spesso col passaggio a coordinate polari (nel caso bidimensionale) si riesce a mettere in evidenza la dipendenza di $f(x, y)$ dalla distanza tra (x, y) e $(0, 0)$ attraverso $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Esempio

2.3 Calcolare

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Affermiamo che questo limite esiste e vale 0. Per dimostrarlo, riscriviamo la funzione in coordinate polari:

$$\frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{2\rho^3 \cos^2\theta \sin\theta}{\rho^2} = 2\rho \cos^2\theta \sin\theta.$$

Poiché $|\cos\theta|, |\sin\theta| \leq 1$, si può scrivere la maggiorazione:

Poiché $|f(x,y)|$ è compreso tra 0 e 2ρ, la funzione è arbitrariamente vicina a zero quando ρ, cioè la distanza tra (x,y) e $(0,0)$, è sufficientemente piccolo. Ne segue che il limite di f è 0, proprio per definizione di limite.

Questo esempio contiene l'idea di un *criterio valido in generale per provare l'esistenza di un limite*. Enunciamolo prima nel caso bidimensionale e poi in generale:

Per dimostrare che $f(x,y) \to L$ per $(x,y) \to (0,0)$, è sufficiente riuscire a scrivere una maggiorazione del tipo

$$|f(\rho,\theta) - L| \leq g(\rho) \text{ dove } g(\rho) \to 0 \text{ per } \rho \to 0.$$

L'essenziale è che la funzione *g non dipenda da θ*. Più in generale, se il punto (x,y) tende a (x_0,y_0), si applica lo stesso criterio con $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, cioè si pone:

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\theta \\ y = y_0 + \rho\sin\theta. \end{cases}$$

Naturalmente, *non riuscire* a dimostrare una maggiorazione del genere non dimostra che il limite non esiste!

Nel caso di una funzione di n variabili, il criterio assume questa forma:

Teorema 3.2 *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita almeno in un intorno di $\mathbf{x}_0$ (salvo al più $\mathbf{x}_0$ stesso) e sia $L \in \mathbb{R}$. Se $g : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione tale che $g(\rho) \to 0$ per $\rho \to 0$ e*

$$|f(\mathbf{x}) - L| \leq g(|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|)$$

per ogni $\mathbf{x}$ in un opportuno intorno sferico di $\mathbf{x}_0$ (salvo al più $\mathbf{x}_0$ stesso), allora

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L.$$

L'essenziale, nell'enunciato precedente, è aver maggiorato la differenza $|f(\mathbf{x}) - L|$ con una quantità che dipende da $\mathbf{x}$ solo mediante la sua distanza da $\mathbf{x}_0$. La dimostrazione del teorema è un'immediata conseguenza della definizione di limite.

Esempi

2.4 Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(\mathbf{x}) = \frac{x_1x_2}{|\mathbf{x}|}e^{|\mathbf{x}|}, \text{ definita per } \mathbf{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \neq \mathbf{0}.$$

Calcolare

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x}).$$

Scriviamo, per ogni $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$:

$$|f(\mathbf{x})| = \frac{|x_1x_2|}{|\mathbf{x}|}e^{|\mathbf{x}|} \leq |\mathbf{x}|\,e^{|\mathbf{x}|} \equiv g(|\mathbf{x}|).$$

Poiché $g(\rho) = \rho e^{\rho} \to 0$ per $\rho \to 0$, il limite cercato è 0.

2.5 Calcolare

Dimostriamo che il limite non esiste. Infatti, la restrizione di f alle due curve $y = \pm x^2$ è:

$$f(x,x^2) = \frac{\pm x^2x^2}{x^4+x^4} = \pm\frac{1}{2},$$

pertanto lungo le due curve la funzione ha due limiti diversi e il limite in due variabili non esiste.

Notiamo che, se scrivessimo la funzione in coordinate polari,

$$f(\rho,\theta) = \frac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^4\cos^4\theta+\rho^2\sin^2\theta} = \frac{\rho\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^2\cos^4\theta+\sin^2\theta},$$

troveremmo che, per ogni θ fissato, $f(\rho,\theta) \to 0$ per $\rho \to 0$. Questo significa che lungo ogni retta uscente dall'origine la funzione ha lo stesso limite (zero). Tuttavia il limite in due variabili non esiste.

Nei Complementi, paragrafo 9.2, studiando le proprietà delle *funzioni omogenee*, vedremo qualche altro criterio utile a decidere se una funzione è continua o meno in un punto in cui il calcolo del limite presenta una forma di indeterminazione.

Infine, illustriamo mediante esempi come si adattino al caso dei limiti per $|\mathbf{x}| \to \infty$ i criteri discussi in questo paragrafo per dimostrare l'esistenza o non esistenza del limite.

Esempio

2.6 Dimostriamo che:

$$\text{(a)} \lim_{|(x,y)|\to\infty} xye^{-(x^2+y^2)} = 0;$$

$$\text{(b)} \lim_{|(x,y)|\to\infty} xye^{x^2+y^2} \text{ non esiste.}$$

(a) È sufficiente passare in coordinate polari e maggiorare come segue:

$$\left|xye^{-(x^2+y^2)}\right| = \left|\rho^2\cos\theta\sin\theta e^{-\rho^2}\right| \leq \rho^2e^{-\rho^2};$$

poiché l'ultima funzione scritta dipende solo da ρ e tende a zero per $\rho \to +\infty$, segue la tesi.
(b) Osserviamo che lungo la retta $y = x$ si ha:

$$f(x,x) = x^2e^{2x^2} \to +\infty \text{ per } x \to \pm\infty,$$

mentre lungo la retta $y = 0$ è $f(x,0) = 0$. Dunque il limite di f per $\mathbf{x} \to \infty$ non esiste.

Esercizi

1 Delle seguenti funzioni reali di due variabili, si provi a capire com'è fatto il grafico, studiando le linee di livello ed eventualmente alcune sezioni con piani opportuni. Si controlli poi quanto previsto disegnando i grafici col computer: