$y'(0)=2c_1\sqrt{2}$. La condizione $y'(0) = 2\sqrt{2}$ implica perciò $c_1 = 1$ e $c_2 = -1$. La soluzione è $y = e^{(1+\sqrt{2})x} - e^{(1-\sqrt{2})x}$ ]

4.32 Determinare la soluzione di ciascuno dei seguenti problemi di Cauchy

$$(a)\begin{cases} y''-y'-2y = 0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=3 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} y''-6y'+10y=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

$$(c)\begin{cases} y''-10y'+25y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases} \qquad (d)\begin{cases} y''-2y'+5y=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

[(a) $y = e^{2x}-e^{-x}$. (b) $y=e^{3x}(\cos x-3\operatorname{sen}x)$; (c) $y=xe^{5x}$; (d) $y=e^{x}\cos 2x$]

4.33 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' - 2y'' + 5y' = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0)=1, \quad y''(0) = 0 \end{cases}$$

[$y = -2/5 + e^{x}\left[(2/5)\cos 2x + (3/10)\operatorname{sen}2x\right]$ ]

## 4C. Equazioni lineari non omogenee a coefficienti costanti

Sia

$$(1)\quad y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\,y'+a_n(x)\,y = f(x)$$



un'equazione differenziale lineare di ordine n, a coefficienti $a_i(x)$ e termine noto $f(x)$ continui in un intervallo limitato $[a,b]$. Per determinare l'*integrale generale* della (1), assai utile è il seguente

TEOREMA 1. *Sia $v_o$ un integrale particolare della (1) e siano $y_1,\ldots,y_n$, n integrali particolari linearmente indipendenti dell'omogenea associata*

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y = 0.$$

*Allora, l'integrale generale della (1) è dato da*

$$y(x) = c_1y_1(x)+\ldots+c_ny_n(x) + v_o(x).$$

In questo paragrafo ci limitiamo a studiare le equazioni del tipo (1) a coefficienti costanti, cioè le equazioni

$$(2)\quad y^{(n)} + a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x),$$

in cui $f(x)$ è un termine noto *di tipo particolare.* Sia

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1}+\ldots+ a_{n-1}\lambda+a_n = 0$$

l'equazione caratteristica dell'equazione

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+ a_{n-1}y' + a_ny = 0$$

omogenea associata alla (2). Si dimostra che, nel caso

$$\boxed{f(x) = e^{\lambda x}p_m(x)}$$

con $p_m(x)$ polinomio di grado m,

i) *se $P(\lambda) \neq 0$, allora la (2) ammette un integrale particolare del tipo*

$$e^{\lambda x} \ q_m(x)$$

*con $q_m(x)$ polinomio di grado m.*

ii) *se $P(\lambda)=0$ e $\lambda$ ha molteplicità h, allora la (2) ammette un integrale particolare del tipo*

$$x^h \ e^{\lambda x} \ q_m(x).$$

Si dimostra inoltre che, nel caso

$$\boxed{f(x)=e^{\lambda x}[p_m(x)\cos\mu x+r_k(x)\operatorname{sen}\mu x]}$$

con $p_m(x)$ polinomio di grado m e $r_k(x)$ polinomio di grado k:

j) *se $P(\lambda\pm i\mu) \neq 0$, allora la (2) ammette un integrale particolare del tipo*

$$e^{\lambda x}[q_{\bar m}(x)\cos\mu x + s_{\bar m}(x)\operatorname{sen}\mu x]$$

*con $q_{\bar m}(x)$, $s_{\bar m}(x)$ polinomi di grado $\bar m = \max\{m,k\}$*

jj) *se $P(\lambda\pm i\mu)=0$ e $\lambda\pm i\mu$ ha molteplicità h, allora la (2) ammette un integrale particolare del tipo*

$$x^h e^{\lambda x} \ [q_{\bar m}(x)\cos\mu x + s_{\bar m}(x)\operatorname{sen}\mu x]$$

In particolare: se f(x) è un polinomio di grado m e risulta, nell'equazione (2), $a_o \neq 0$, allora la (2) ha per integrale particolare un polinomio dello stesso grado; se invece $a_o=0$ e perciò $\lambda=0$ è una radice di $P(\lambda)=0$, allora la (2) ha per integrale particolare un polinomio di grado m+h del tipo $x^h(b_1+b_2x+\dots+b_m x^m)$ ove h è la molteplicità della radice $\lambda=0$.



4.34 Risolvere l'equazione differenziale non omogenea $y''-3y' + 2y = 2x^3 - x^2 + 1$.

[L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\lambda^2-3\lambda+2=0$ ed ammette le radici 1,2; perciò l'integrale generale dell'omogenea associata è $c_1e^x+c_2e^{2x}$. Poichè il termine noto dell'equazione differenziale data è un polinomio di terzo grado, e $\lambda=0$ non è radice dell'equazione caratteristica, allora l'equazione data ammette un integrale particolare del tipo $v_o(x) = b_ox^3+b_1x^2+b_2x+b_3$. Sostituendo $v_o$ nell'equazione, si ricava $v_o''(x) - 3v_o'(x) + 2v_o(x)=2x^3-x^2+1$, cioè:

$$(6b_ox + 2b_1)-3(3b_ox^2+2b_1x+b_2)+2b_ox^3+2b_1x^2+2b_2x+2b_3=2x^3-x^2+1,$$

da cui, per ogni $x\in R$

$$2b_ox^3+(2b_1-9b_o)x^2+(6b_o-6b_1+2b_2)x+2b_1-3b_2+2b_3=2x^3-x^2+1.$$

Da tale relazione, per il principio di identità dei polinomi, segue:

$$b_o=1, \quad 2b_1-9b_o=-1, \quad 6b_o-6b_1+2b_2=0, \quad 2b_1-3b_2+2b_3=1$$

e cioè $b_o=1$, $b_1=4$, $b_2=9$, $b_3=10$. Pertanto, l'integrale generale è $y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}+x^3+4x^2+9x+10$ ]

4.35 Risolvere l'equazione differenziale non omogenea $y''-4y' = x^2+1$.

[L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\lambda^2-4\lambda = 0$ ed ammette le radici 0,4; perciò l'integrale generale dell'omogenea associata è $c_1 + c_2e^{4x}$.

Poichè il termine noto dell'equazione data è un polinomio di secon