Capitolo 6

Serie numeriche

6.1 Serie convergenti, divergenti, indeterminate

Per lo studio delle successioni, oltre che per la risoluzione di numerosi problemi teorici ed applicativi, è utile disporre di un nuovo strumento di calcolo e d'indagine, cioè della teoria delle serie numeriche.

Sia

$$u_1, u_2, \ldots, u_k \ldots, \tag{6.1.1}$$

una successione assegnata di numeri reali; si chiama serie ad essa associata l'espressione simbolica

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \tag{6.1.2}$$

con la quale si indica formalmente l'operazione di addizione degli infiniti elementi $\{u_k\}$, ordinati al crescere di k. I numeri u_k si dicono *termini* della serie (che spesso si scrive semplicemente $\sum u_k$).

Alla operazione di addizione di infiniti elementi ora indicata si cerca di attribuire un preciso significato nel modo (quasi naturale) che andiamo ad esporre.

Associamo alla serie la *successione* $\{S_n\}$ *delle somme parziali* (o *ridotte*) *di ordine* n, definite da

$$\begin{aligned}
&S_1 = u_1\\
&S_2 = u_1 + u_2\\
&S_3 = u_1 + u_2 + u_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{6.1.3}$$

ed esaminiamo se $\{S_n\}$ ammette limite per $n \longrightarrow \infty$.

Se la successione $\{S_n\}$ è *regolare* con limite $S \in \overline{\mathbb{R}}$, diremo che *la serie* (regolare) *ha somma* (determinata) S e porremo per definizione

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{n \to \infty} S_n = S\,. \tag{6.1.4}$$

Più precisamente, se $S \in \mathbb{R}$, si dirà che la serie è *convergente* ed ha somma (finita) S; se $S = +\infty$ [ovvero $-\infty$] si dirà che la serie è *divergente* ed ha somma $+\infty$ [ovvero $-\infty$]. Se $\{S_n\}$ *non è regolare* diremo che la serie data *non è regolare*, ovvero *non ammette una somma* o *è indeterminata*.

Diamo alcuni semplici esempi.

Esempio 1 - La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots$$

è *regolare* ed ha somma $S = 1$. Infatti da $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ segue

$$S_n = \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) + \ldots + \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = 1 - \frac{1}{n+1}\,,$$

onde $S_n \longrightarrow 1$, per $n \longrightarrow \infty$; la serie è perciò convergente con somma 1.

Esempio 2 - Serie geometrica. Per ogni fissato $x \in \mathbb{R}$, si consideri la somma degli infiniti termini $1, x, x^2, x^3, \ldots$ della *progressione geometrica* di ragione x, cioè la cosiddetta serie geometrica

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{k-1} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}\,, \tag{6.1.5}$$

la cui regolarità dipende dal fissato x. Se $x \geq 1$ si ha $S_n \geq n$ e perciò $S_n \longrightarrow +\infty$. Nel caso $x < 1$, si ricordi che

$$S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^n}{1 - x}\,;$$

dopo ciò se $|x| < 1$ risulta $x^n \longrightarrow 0$ e quindi $S_n \longrightarrow 1/(1-x)$, se invece $x \leq -1$, poiché $\{x^n\}$ non ha limite per $n \longrightarrow \infty$, la $\{S_n\}$ non è regolare. I risultati ottenuti possono così riassumersi:

Teorema 6.1.I – *La serie geometrica* (6.1.5) *è non regolare se $x \leq -1$, è divergente a $+\infty$ se $x \geq 1$, è convergente se $|x| < 1$ e si ha*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1 - x}\,, \qquad \forall x \in (-1, 1)\,. \tag{6.1.6}$$

Esempio 3 - Serie a termini di segno costante. Sia $u_k \geq 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$; in tal caso si ha certamente

$$S_{n+1} \geq S_n\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

onde $\{S_n\}$ è una successione monotona non decrescente; è perciò *regolare* e si ha [vedi teorema 5.3.I]

$$S_n \longrightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \{S_n\} = S\,.$$

Pertanto se l'insieme numerico descritto da $\{S_n\}$ è superiormente limitato, la serie è *convergente*; in caso contrario è divergente con somma $S = +\infty$. In modo analogo si procede se $u_k \leq 0$, onde si può così concludere:

Teorema 6.1.II – *Ogni serie a termini di segno costante è regolare: se $u_k \geq 0$, $\forall\, k$, la somma S è l'estremo superiore dell'insieme numerico descritto dalle somme parziali; se $u_k \leq 0$, $\forall\, k$, è invece l'estremo inferiore.*

Esempio 4 - Riprendendo la (5.3.2), si può ora scrivere

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,, \tag{6.1.7}$$

non appena si applichi la definizione di somma della serie.

In quanto precede abbiamo ricondotto lo studio di una *serie* a quello di una *successione* (delle sue somme parziali). Viceversa, data una qualsiasi successione $\{a_n\}$, al suo studio si può sempre sostituire quello della serie

$$a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k)\,, \tag{6.1.8}$$

le cui somme parziali di ordine n coincidono con a_n, cosicché la regolarità di $\{a_n\}$ corrisponde a quella della serie e l'eventuale *limite* di $\{a_n\}$ alla *somma* della serie. Le due teorie sono perciò equivalenti; tuttavia quella delle serie pone taluni risultati sotto una forma più espressiva e di facile applicabilità, apportando in tal modo contributi anche alla teoria dei limiti delle successioni.

6.2 Il criterio generale di convergenza

Nello studio della serie (6.1.2) è opportuno stabilire dei criteri che ne garantiscano la convergenza, pur senza indicare direttamente il valore della somma. È fondamentale, da tale punto di vista il cosiddetto *criterio generale di convergenza*:

Teorema 6.2.I – *Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie* (6.1.2) *sia convergente è che, comunque si fissi un $\varepsilon > 0$, esista un indice ν_ε tale che, $\forall\, n > \nu_\varepsilon$ risulti*

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon\,, \quad \forall\, p \in \mathbb{N}\,. \tag{6.2.1}$$

Dimostrazione - Per la convergenza della serie, occorre e basta quella della successione delle sue somme parziali $\{S_n\}$. Ricorrendo al criterio di convergenza di Cauchy nella forma (5.7.1′), occorre e basta che $\forall\, \varepsilon > 0$ esista un ν_ε tale che $\forall\, n > \nu_\varepsilon$ e $\forall\, p \in \mathbb{N}$ risulti $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, cioè proprio la (6.2.1). $\square$

Da questo teorema segue immediatamente quest'altro che si ottiene ponendo nella (6.2.1) $p = 1$:

Teorema 6.2.II – *Condizione necessaria perché la serie* (6.1.2) *sia convergente è che risulti*

$$u_k \longrightarrow 0\,, \quad (k \longrightarrow \infty)\,. \tag{6.2.2}$$

Conviene subito osservare che la (6.2.2) è indispensabile per avere la convergenza di una serie, ma in generale non è sufficiente.

Illustriamo la questione con lo studio della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+\,; \tag{6.2.3}$$

nel caso $\alpha = 1$ tale serie è detta *armonica*,negli altri casi è detta armonica generalizzata di parametro α. Si ha il seguente

Teorema 6.2.III – *La serie* (6.2.3) *è divergente a* $+\infty$ *se* $\alpha \leq 1$, *è convergente se* $\alpha > 1$.

Dimostrazione – Osserviamo intanto che trattasi di una serie a termini positivi e quindi, per il teorema 6.1.II, certamente regolare con somma finita o $+\infty$.

Poiché $1/k^\alpha \longrightarrow 0$, è verificata la (6.2.2) $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}^+$, tuttavia se $\alpha \in (0,1]$ non è soddisfatta la (6.2.1) con $p = n$, onde la serie non può che divergere a $+\infty$. Ciò è subito visto osservando che

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(n+n)^\alpha} > n \cdot \frac{1}{(2n)^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{2^\alpha} \geq \frac{1}{2^\alpha}\,,$$

onde per nessun $\varepsilon \in \left(0, 1/2^\alpha\right)$ può essere soddisfatta la (6.2.1) con $p = n$.

Se $\alpha > 1$, poiché la serie data è sempre regolare, si può valutarne la somma utilizzando una *sottosuccessione* $\{S_{2^h-1}\}$ delle somme parziali $\{S_n\}$ [vedi teorema 5.2.III]. Poiché

$$\begin{aligned} S_{2^h-1} &= 1 + \left[\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right] + \left[\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right] + \ldots + \\ &+ \left[\left(\frac{1}{2^{h-1}}\right)^\alpha + \left(\frac{1}{2^{h-1}+1}\right)^\alpha + \ldots + \left(\frac{1}{2^h-1}\right)^\alpha\right] < \\ &< 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^\alpha} + 4 \cdot \frac{1}{4^\alpha} + \ldots + 2^{h-1}\left(\frac{1}{2^{h-1}}\right)^\alpha = \\ &= \sum_{k=1}^{h} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{k-1} < \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{k-1} = \frac{1}{1-(1/2^{\alpha-1})}\,, \end{aligned}$$

[avendo tenuto conto all'ultimo membro della serie geometrica di ragione $2^{1-\alpha}$] la successione monotona $\{S_{2^h-1}\}$ è limitata e quindi convergente; tale è dunque la successione $\{S_n\}$.

Nel determinare la natura di una serie è utile rilevare la seguente notevole proprietà che, *ai fini della regolarità*, permette di trascurare un numero finito di suoi termini.

Se in una serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, si sopprimono i *primi* r termini si ottiene una nuova serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} u_{r+h} \tag{6.2.4}$$

che è detta *serie resto di ordine* r *della data*. Le sue somme parziali $T_n = \sum\limits_{h=1}^{n} u_{r+h}$ sono legate a quelle della serie data da

$$T_n = S_{r+n} - S_r \tag{6.2.5}$$

e perciò, la regolarità o meno di $\{T_n\}$ equivale a quella di $\{S_{r+n}\}$, indi di $\{S_n\}$.

Nel caso di regolarità, poiché $\lim S_n = \lim S_{n+r}$, si ha poi

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \big(\lim_{n\to\infty} S_n\big) - S_r\,, \tag{6.2.6}$$

perciò si può così concludere:

Teorema 6.2.IV – *La serie resto di una data serie è convergente, divergente a $+\infty$ o a $-\infty$, indeterminata, se e solo se tale è la serie data. Nel caso di convergenza, la serie resto ha somma $T = S - S_r$; viceversa, se la serie resto ha somma finita T, la serie data ha somma $S = S_r + T$.*

Si osservi che nel caso di convergenza, poiché $(S - S_r) \longrightarrow 0$ per $r \longrightarrow \infty$, la serie resto ha somma T che rappresenta l'errore che si commette quando si vuole approssimare la somma S con la somma parziale S_r.

6.3 Proprietà ed operazioni

Possiamo domandarci se nel passaggio dalla somma di un numero finito di addendi a quella di una serie, si siano conservate le proprietà *commutativa*, *associativa*, *distributiva* richiamate in § 1.1. In generale la risposta è *negativa*: formuleremo perciò opportune ipotesi sufficienti a garantire la validità delle singole proprietà.

Diremo che una serie $\sum v_k$ è stata dedotta dalla $\sum u_k$ *associandone i termini*, se esiste una successione di indici $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \ldots$, tale da aversi

$$v_1 = u_1 + u_2 + \ldots + u_{\nu_1}\,; \quad v_2 = u_{\nu_1+1} + u_{\nu_1+2} + \ldots + u_{\nu_2}\,;$$
$$v_3 = u_{\nu_2+1} + u_{\nu_2+2} + \ldots + u_{\nu_3}\,; \ldots\,, \,.$$

Possiamo allora dimostrare il seguente teorema:

Teorema 6.3.I – *Se la serie $\sum u_k$ è regolare, tale risulta ogni serie $\sum v_k$ da essa dedotta associandone i termini; le due serie hanno la medesima somma.*

Dimostrazione – Dette T_n le somme parziali della seconda serie, si ha

$$T_n = S_{\nu_n}$$

avendo indicato con $S_1, S_2, \dots$, le somme parziali della serie data. La $\{T_n\}$ è quindi una *sottosuccessione* di quella delle somme parziali $\{S_n\}$ e pertanto ha il medesimo limite, onde la tesi. $\square$

È bene avvertire che nel caso di *non regolarità non vale la proprietà associativa*: basta considerare ad esempio la serie non regolare $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}$. Eseguendo la associazione $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots$ si ha manifestamente somma 0; mentre si ha somma 1 eseguendo quest'altra $1-(1-1)-(1-1)-\dots$.

Per la proprietà *distributiva*, cioè per la *linearità* dell'operatore $\sum$, si ha il teorema seguente:

Sì

Teorema 6.3.II – *Se le serie $\sum u_k^{(1)}$, $\sum u_k^{(2)}$ sono convergenti con rispettive somme $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, anche la serie combinazione lineare (a coefficienti c_1, c_2)*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(c_1 u_k^{(1)} + c_2 u_k^{(2)}\right)$$

è convergente ed ha somma $c_1 S^{(1)} + c_2 S^{(2)}$ (combinazione lineare delle somme):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(c_1 u_k^{(1)} + c_2 u_k^{(2)}\right) = c_1 \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(1)} + c_2 \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(2)}\,. \tag{6.3.1}$$

Lo stesso vale per combinazione di un qualsiasi numero finito di serie.

NO

Dimostrazione - Poiché, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n}\left(c_1 u_k^{(1)} + c_2 u_k^{(2)}\right) = c_1 \sum_{k=1}^{n} u_k^{(1)} + c_2 \sum_{k=1}^{n} u_k^{(2)}\,,$$

basta eseguire il passaggio al limite per $n \longrightarrow \infty$, secondo (5.4.1). $\square$

Osserviamo che la (6.3.1) può essere estesa anche a serie non tutte convergenti, naturalmente nel passaggio al limite sopra indicato andranno evitati i casi in cui compaiono forme indeterminate $\infty - \infty$ [vedi teorema 5.4.II].

Per ciò che concerne la proprietà commutativa è bene premettere ulteriori considerazioni sulle serie a termini di segno costante.

6.4 Serie a termini di segno costante; regolarità incondizionata

Nell'esempio 3 di § 6.1, si è già messo in evidenza che le serie a termini di segno costante $u_k \geq 0$ (ovvero $u_k \leq 0$) sono sempre regolari, con somme finite o $+\infty$ (ovvero $-\infty$). Ci riferiremo sempre al caso $u_k \geq 0$, l'altro essendo conseguenza immediata.

S

Vale il seguente fondamentale *criterio di confronto*:

Teorema 6.4.I – *Date due serie $\sum u_k$, $\sum v_k$ entrambe a termini non negativi, se esiste una costante $c > 0$ tale che*

$$u_k \leq c v_k\,, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\,, \tag{6.4.1}$$

risulta anche

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \leq c \sum_{k=1}^{\infty} v_k\,, \tag{6.4.2}$$

onde dalla convergenza della serie a secondo membro segue quella a primo membro; dalla divergenza a $+\infty$ *di* $\sum u_k$ *segue quella di* $\sum v_k$.

Dimostrazione – Basta osservare la disuguaglianza relativa alle somme parziali

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \leq c \sum_{k=1}^{n} v_k$$

ed eseguire il passaggio al limite su entrambi i membri. □

Osservazione I - Nelle applicazioni è assai utile tener conto che la (6.4.2) vale se $u_k \sim v_k$, cioè se $\{u_k\}$ e $\{v_k\}$ hanno lo stesso *comportamento asintotico* per $k \longrightarrow \infty$ [vedi (5.6.9)]. Spesso in relazione ad una data $\sum u_k$ si utilizza *come serie di confronto una geometrica* con $x \in \mathbb{R}^+$ o una *armonica generalizzata*.

Diremo che una serie $\sum v_k$ è stata dedotta dalla $\sum u_k$ alterandone l'ordine dei termini, se esiste una successione di interi positivi (indici)

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots,$$

tale che ogni elemento di $\mathbb{N}$ vi compaia una sola volta [cioè $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ sia una permutazione di tutti gli elementi di $\mathbb{N}$] e che risulti

$$v_1 = u_{\nu_1}\,, \quad v_2 = u_{\nu_2}\,, \quad v_3 = u_{\nu_3}, \ldots, v_n = u_{\nu_n}\,. \tag{6.4.3}$$

Ciò premesso, viene così risolta la questione della validità o meno della proprietà commutativa.

Teorema 6.4.II – *Data una serie a termini di segno costante, ogni altra da essa dedotta alterandone l'ordine dei termini ha la medesima somma.*

Dimostrazione - Sia $\sum u_k$ la serie data e $\sum v_k$ quella dedotta secondo (6.4.3); sia ad esempio $u_k \geq 0$ (indi $v_k \geq 0$). Posto (con il consueto significato dei simboli)

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} u_{\nu_k}\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,$$

sussistono le relazioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \lim V_n = \sup\{V_n\} = V\,,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim S_n = \sup\{S_n\} = S\,.$$

Ciò premesso, basta provare che $V = S$. Perverremo allo scopo mostrando come la somma S della serie data, non possa essere superata da quella V di una dedotta alterandone l'ordine dei suoi termini: cioè $V \leq S$. Naturalmente le parti possono

Fissata una tale U_m, sia p il più grande tra i due indici h, k che figurano tra i termini di U_m; si ha allora

$$U_m \leq \sum_{h=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} |u_h v_k| = \sum_{h=1}^{p} |u_h| \cdot \sum_{k=1}^{p} |v_k| \,. \tag{6.5.7}$$

Poiché le serie (6.5.3) sono assolutamente convergenti, le somme $\sum\limits_{h=1}^{p} |u_h|$, $\sum\limits_{k=1}^{p} |v_k|$ si mantengono entrambe limitate al variare di p e quindi anche U_m descrive un insieme numerico limitato. Ciò prova l'assoluta convergenza della serie P.

Rimane da far vedere che la somma di una qualsiasi serie prodotto P è uguale a ST. Poiché una tale serie è assolutamente convergente, la sua somma ha un valore indipendente dall'ordine dei suoi termini e perciò per calcolare tale somma possiamo ordinarli, ad esempio, secondo la (6.5.6) (cioè riferirci alla serie prodotto per quadrati) e possiamo anche associare i termini di questa nel modo seguente

$$u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1) + (u_1v_3 + u_2v_3 + u_3v_3 + u_3v_2 + u_3v_1) + \ldots \,.$$

Le somme parziali di quest'ultima serie sono evidentemente:

$$P_1 = u_1v_1\,, \quad P_2 = (u_1 + u_2)(v_1 + v_2)\,, \quad P_3 = (u_1 + u_2 + u_3)(v_1 + v_2 + v_3)\,,$$

ossia in generale $P_n = S_nT_n$, avendo indicato con S_n, T_n le somme parziali delle serie (6.5.3). Passando al limite per $n \longrightarrow \infty$ risulta $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = ST$. □

6.6 Criteri di convergenza assoluta

Sono largamente usati in pratica i seguenti teoremi che forniscono delle condizioni *sufficienti* affinché una data serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{6.6.1}$$

sia assolutamente convergente, quindi anche convergente.

Nei teoremi che seguono verrà formulata una opportuna ipotesi sui termini u_k, valida $\forall\, k \in \mathbb{N}$; i teoremi rimangono validi se quella ipotesi *è valida definitivamente*, cioè da un certo indice r in poi: basta riferirsi alla serie resto, secondo quanto affermato nel teorema 6.2.IV.

Teorema 6.6.I (Criterio di confronto) – *Sia*

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \tag{6.6.2}$$

un'assegnata serie a termini positivi. Se per ogni indice k si ha $|u_k| \leq cp_k$ (con c costante positiva) e se la serie (6.6.2) *converge, allora la serie* (6.6.1) *converge assolutamente. Se per ogni indice k si ha $|u_k| \geq cp_k$ e se la serie* (6.6.2) *diverge, allora la serie* (6.6.1) *non converge assolutamente.*

Dimostrazione – È una conseguenza immediata del teorema 6.4.I. □

Si

Teorema 6.6.II – *Per $k \longrightarrow \infty$, il termine generico u_k della serie (6.6.1) sia infinitesimo con un ordine determinato α (rispetto all'infinitesimo principale $1/k$). Allora se $\alpha > 1$ la serie (6.6.1) è assolutamente convergente; se $\alpha \leq 1$ la serie stessa non è assolutamente convergente.*

Dimostrazione – Se per $k \longrightarrow \infty$, u_k è infinitesimo di ordine α, esistono due opportuni numeri *positivi* a, b con $a < b$, in modo che in virtù di (5.6.3′) si ha definitivamente

$$a/k^{\alpha} \leq |u_k| \leq b/k^{\alpha} \,. \tag{6.6.3}$$

Dal criterio di confronto 6.4.I, tenendo conto del teorema 6.2.III sulla armonica generalizzata, si ha la tesi. □

NO

Osservazione I - Stante la (6.6.3) se $\alpha > 1$, e risulta $a = 0$ è evidente che si ha ancora la convergenza assoluta; se $\alpha \leq 1$ e $b = +\infty$ non si ha la convergenza assoluta.

Ricorrendo a massimo e minimo limite (§ 5.7) si può anche affermare che per la convergenza assoluta è sufficiente che

$$\lim{}'' \, |u_k| \cdot k^{\alpha} < +\infty \,, \text{con } \alpha > 1 \,;$$

per la non convergenza assoluta

$$\lim{}' \, |u_k| \cdot k^{\alpha} > 0 \,, \text{con } \alpha \leq 1 \,.$$

Esempio 1 - Le serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k\sqrt{k}} \,; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2} \,, \quad x \in \mathbb{R} \,, \quad \text{fissato} \,,$$

sono assolutamente convergenti. La prima ha i termini infinitesimi di ordine $\alpha = 3/2 > 1$ rispetto a $1/k$; per la seconda vale l'osservazione sopra fatta, si ha $0 \leq \left|\frac{\sin kx}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}$, onde vale la maggiorazione di destra della (6.6.3) con $b = 1$, $\alpha = 2 > 1$, mentre $a = 0$.

NO

Teorema 6.6.III (Criterio della radice) – *Se esiste un numero positivo $p < 1$, tale da aversi per ogni indice k*

$$\sqrt[k]{|u_k|} \leq p < 1 \,, \tag{6.6.4}$$

allora la serie (6.6.1) *è assolutamente convergente. Se per infiniti valori di k risulta $\sqrt[k]{|u_k|} \geq 1$, la serie stessa non è convergente.*

Dimostrazione – La seconda affermazione è evidente perché l'ipotesi fatta impedisce che si verifichi la $\lim\limits_{k \to \infty} u_k = 0$ che è condizione necessaria per la convergenza di una serie. Per quanto riguarda la prima affermazione, osserviamo che dalla

(6.6.4) segue $|u_k| \leq p^k$ e poiché la serie geometrica $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p^k$ è convergente (essendo $0 < p < 1$), si conclude (per il teorema 6.6.I) che converge la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$. □

Nell'applicare questo criterio, conviene tener conto del seguente corollario:

Sì

Teorema 6.6.III′ – *Se esiste il limite*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|u_k|} = l\,, \quad l \in [0, +\infty]\,, \tag{6.6.4′}$$

se $l < 1$ la serie (6.6.1) è assolutamente convergente, non è convergente se $l > 1$; se $l = 1$ nulla si può affermare a priori.

NO

Dimostrazione – Se $l < 1$, fissato un qualsiasi p con $l < p < 1$, si ha definitivamente (si pensi $p = l + \varepsilon$) $|u_k|^{1/k} < p < 1$, onde la tesi per il teorema precedente. Se $l > 1$ non può essere definitivamente $|u_k|^{1/k} < 1$, cioè *per infiniti valori di k* risulta $|u_k|^{1/k} > 1$, si ricade perciò nel teorema precedente. □

Questo corollario richiede l'*esistenza* del limite (6.6.4′); nel caso di *non esistenza* basta riferirsi al massimo limite, avendosi con considerazioni analoghe alle precedenti il seguente risultato della massima generalità:

NO

Teorema 6.6.III″ – *Considerato*

$$\lim{}'' |u_k|^{1/k} = l\,, \quad l \in [0, +\infty]\,, \tag{6.6.4″}$$

se $l < 1$ la serie (6.6.1) è assolutamente convergente; se $l > 1$ la serie non è convergente.

Esempio 2 - La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} [k/(2k+1)]^k$$

è assolutamente convergente perché si ha

$$\lim \sqrt[k]{[k/(2k+1)]^k} = 1/2 < 1\,.$$

NO

Teorema 6.6.IV (Criterio del rapporto) – *Se la serie (6.6.1) ha tutti i termini diversi da zero ed esiste un numero positivo $p < 1$ tale da aversi per ogni indice k*

$$|u_{k+1}| \leq p|u_k|\,, \quad \textit{cioè} \quad |u_{k+1}|/|u_k| \leq p < 1\,, \tag{6.6.5}$$

la serie (6.6.1) è assolutamente convergente. Se esiste una successione di indici $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \ldots < \nu_k < \nu_{k+1} \ldots$ tale che $|u_{\nu_{k+1}}| \geq |u_{\nu_k}| > 0$, in particolare $|u_{k+1}|/|u_k| \geq 1$, la serie (6.6.1) non è convergente.

Dimostrazione – Dalle (6.6.5) segue $|u_2| \leq p|u_1|, |u_3| \leq p|u_2| \leq p^2|u_1|, \ldots, |u_k| \leq p^{k-1}|u_1|$, onde per il criterio del confronto (6.6.I) e per la convergenza della serie geometrica di ragione $p \in (0,1)$ si ha la tesi.

La seconda affermazione è evidente; non può essere $u_k \longrightarrow 0$ per $k \longrightarrow \infty$, perché la successione $\{u_k\}$ contiene la sottosuccessione $\{u_{\nu_k}\}$, *non decrescente* e con limite positivo essendo $|u_{\nu_1}| > 0$. □

Il *criterio del rapporto* si applica spesso sotto la forma espressa dal seguente corollario:

S:

Teorema 6.6.IV′ – *Se* $\forall\, k \in \mathbb{N}$ *si ha* $u_k \neq 0$ *ed esiste il limite (del rapporto)*

$$\lim_{k\to\infty} |u_{k+1}/u_k| = l\,, \quad l \in [0, +\infty]\,, \tag{6.6.6}$$

se $l < 1$ *la serie* (6.6.1) *è assolutamente convergente, non converge se* $l > 1$*; nulla può affermarsi se* $l = 1$.

Dimostrazione - Se $l < 1$, $\forall\, p \in \mathbb{R}^+$ con $l < p < 1$, si ha definitivamente

$$|u_{k+1}/u_k| < p < 1\,;$$

se $l > 1$, per infiniti valori di k (anzi definitivamente) si ha $|u_{k+1}/u_k| > 1$. Perciò in entrambi i casi si ricade nel teorema precedente. □

Esempio 3 - La serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^{k-1}/(k-1)!$ è assolutamente convergente $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Infatti per $x = 0$ la cosa è evidente; per $x \neq 0$ si ha

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{x^k/k!}{x^{k-1}/(k-1)!} \right| = \lim_{k\to\infty} |x|/k = 0\,.$$

10 Sarà mostrato nel seguito che $\forall\, x \in \mathbb{R}$ la somma della serie vale e^x.

Teorema 6.6.V (Criterio di Raabe) – *Se la serie* (6.6.1) *ha tutti i termini diversi da zero ed esiste un numero positivo* p *tale da aversi per ogni indice* k

$$k|u_k/u_{k+1}| - (k+1) \geq p\,, \tag{6.6.7}$$

allora la serie stessa è assolutamente convergente. Se è sempre

$$k|u_k/u_{k+1}| - (k+1) \leq 0\,, \tag{6.6.8}$$

la serie non è assolutamente convergente.

Dimostrazione - Proviamo la prima affermazione. Dalla (6.6.7) segue

$$k|u_k| - (k+1)|u_{k+1}| \geq p|u_{k+1}| > 0 \tag{6.6.9}$$

e si ha quindi $k|u_k| > (k+1)|u_{k+1}|$. Ciò esprime che la successione di numeri positivi $k|u_k|$ è decrescente; perciò $k|u_k| \longrightarrow l \geq 0$. Ne deriva che la serie a termini positivi $\sum \{k|u_k| - (k+1)|u_{k+1}|\}$ è convergente perché la sua somma parziale di ordine n vale evidentemente $|u_1| - (n+1)|u_{n+1}|$ e quindi, per $n \longrightarrow \infty$, tende al limite $|u_1| - l$. Dopo ciò, poiché dalla (6.6.9) segue $|u_{k+1}| \leq \{k|u_k| - (k+1)|u_{k+1}|\}/p$, si deduce per il teorema 6.6.I che converge anche la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |u_{k+1}|$, cioè $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$.

Per la seconda affermazione, basta osservare che dalla (6.6.8) segue $1|u_1| \leq 2|u_2| \leq \ldots \leq k|u_k|$, cioè $|u_k| \geq |u_1|/k$. La divergenza della serie armonica impone quella della $\sum |u_k|$, onde la serie (6.6.1) non è assolutamente convergente. □