scritture

$$\lim_{P\to P_0} f(P) \quad ; \quad \lim_{t\to t_0} f(x(t), y(t)),$$

coincidono; però esistono funzioni per le quali ciò non avviene e cioè esistono funzioni per le quali il limite superficiale e quello lungo una certa direzione non solo non coincidono, ma addirittura uno esiste e l'altro no. In altre parole:

a) Dall'esistenza del limite superficiale non discende necessariamente l'esistenza dei doppi limiti;

b) Possono esistere i doppi limiti e non quello superficiale.

Si potrebbe dimostrare, a questo proposito, che se, oltre al limite superficiale, esiste, per ogni y di un conveniente intorno di y_0 il limite lineare $\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$, allora esiste il doppio limite $\lim_{y\to y_0} \varphi(y) = \lim_{y\to y_0} \{\lim_{x\to x_0} f(x,y)\}$ e coincide con quello superficiale.

13) *Esempi*: a) Consideriamo la funzione $x = \frac{xy}{x^2+y^2}$, continua in un qualunque dominio limitato D che non contenga l'origine e vediamo se esiste, oppur no, il limite per $P \equiv (x;y)$ che tenga all'origine $o \equiv (0;0)$. Si vede facilmente che esistono e sono uguali i doppi limiti, per $(x,y) \to (0,0)$; infatti si ha

$$\left\{\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right\} = \lim_{x\to 0}\{0\} = 0; \qquad \lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right\} = \lim_{y\to 0}\{0\} = 0.$$

Cerchiamo ora il limite lungo una retta qualsiasi $y = mx$; avremo in tal caso

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{mx^2}{x^2+m^2y^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

e quindi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \frac{m}{1+m^2}; \quad y = mx,$$

cioè , lungo ogni retta di coefficiente angolare m, uscente dall'origine, c'è un limite diverso. Per es. per $m = 0$ e per $m = \infty$ il limite è nullo; per $m = 1$ il limite è $1/2$ e così di seguito; non esiste quindi il limite superficiale.

b) Un altro esempio semplicissimo, che ci mostra come viceversa possa esistere il limite superficiale, ma non i doppi limiti è dato dalla funzione

$$z = x\sin\left(\frac{1}{y}\right) + y\sin\left(\frac{1}{x}\right);$$

continua in ogni regione piana che non contenga tratti degli assi coordinati (lungo i quali perde ogni significato).

Però si vede subito che esiste il limite superficiale per P che tende all'origine e precisamente che si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left\{x\sin\left(\frac{1}{y}\right) + y\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right\} = 0.$$

Infatti preso un $\varepsilon > 0$, piccolo a piacere, consideriamo il quadrato di centro l'origine, con i lati paralleli agli assi coordinati e lunghi ε; per ogni punto di questo quadrato risulta $|x| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|y| < \frac{\varepsilon}{2}$

e quindi

$$\left|x\sin\left(\frac{1}{y}\right) + y\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le |x|\cdot\left|\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right| + |y|\cdot\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le |x| + |y| < \varepsilon.$$

Invece non esistono i doppi limiti; infatti si ha, per esempio,

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}\left[x\sin\left(\frac{1}{y}\right) + y\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right\} = \lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0} y\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right\};$$

ma $\lim_{x\to 0} y\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ non esiste e ciò conferma l'asserto.

Capitolo 6

Elementi di calcolo differenziale per le funzioni in più variabili

6.1 Definizione di derivata parziale

1) Sia $z = f(x,y)$ una funzione continua in tutto un dominio D del piano xy e sia P_0 un punto interno di D; consideriamo poi la funzione di una sola variabile

$$\varphi(x) = f(x, y_0),$$

che si ottiene considerando il punto generico P variabile sulla parallela all'asse delle x, passante per P_0 (fig.6.1)

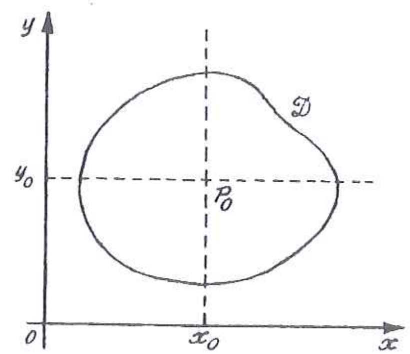

Figura 6.1:

e supponiamo che questa funzione $\varphi(x)$, continua in x_0, ammetta ivi la derivata, cioè che esista e sia finito il

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h}.$$

Tale limite si chiama la *derivata parziale di* $f(x)$ *rispetto alla* x nel punto P_0 e si indica con uno dei due simboli

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \qquad f_x(x_0 y_0),$$

cioè si pone

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0 y_0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Analogamente possiamo considerare la funzione di una sola variabile

$$\psi(y) = f(x_0, y)$$

continua in $y = y_0$; se questa ammette la derivata, cioè se esiste il limite

$$\lim_{k\to 0} \frac{\psi(y_0+k) - \psi(y_0)}{k},$$

questo si chiama *la derivata parziale di* f *rispetto ad* y, nel punto P_0 e si indica con uno dei simboli

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \qquad f_x(x_0, y_0),$$

cioè si pone

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{k\to 0} \frac{\varphi(y_0+k) - \varphi(y_0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

In contrapposto con le derivate parziali delle funzioni in più variabili, le derivate delle funzioni di una sola variabile si sogliono chiamare *derivate ordinarie*. Osserviamo poi che, in base alle considerazioni del numero precedente per calcolare p.es. la derivata parziale di una funzione rispetto alla x, nel punto (x_0, y_0),si dovrebbe cominciare col sostituire in $f(x, y)$, alla y il valore y_0 e poi derivare rispetto alla x, con le regole ordinarie di derivazione per le funzioni di una variabile; ma in generale almeno, ciò non è necessario. Si esegue cioè la derivazione rispetto alla x, pensando mentalmente che la y sia una costante numerica; analogamente quando si deriva parzialmente rispetto alla y, si considera la x come costante.

2) È evidente che valgono per le derivate parziali delle funzioni in più variabili le stesse regole di derivazione delle derivate ordinarie e cioè le regole di derivazione della somma del prodotto, del quoziente, e della funzione di funzione nel senso che qui sotto illustriamo:

Sia $z = f(u)$ una funzione della variabile u, dove u (a sua volta) è una funzione di x, y cioè $u = g(x, y)$; allora z risulterà una funzione di x, y composta per mezzo della funzione componente $u = g(x, y)$ ed avremo le formule di derivazione

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y},$$

dove poi in $\frac{df}{du}$ si deve pensare di sostituire u con $g(x, y)$.

Per es. sia $z = \sqrt{x^2+y^2}$; porremo $u = x^2 + y^2$ ed avremo $z = \sqrt{u}$, dopo di che sarà senz altro

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{u}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3) *Significato geometrico delle derivate parziali.*

Consideriamo la superficie definita dall'equazione $z = f(x, y)$ e sia $M_0 \equiv (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ il punto di essa avente per proiezione sul piano xy il punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$.

Conduciamo da P_0 la parallela all'asse delle x di equazione $y = y_0$; questa si può considerare la traccia sul piano xy del piano parallelo al piano zx (piano di fronte) (fig.6.2)

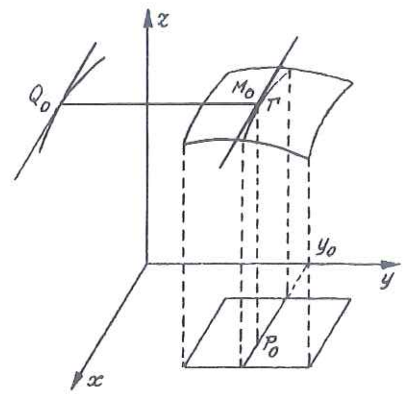

Figura 6.2:

passante per P_0 (di equazione $y = y_0$), il quale segherà la nostra superficie in una linea piana Γ di equazioni

$$y = y_0, \qquad z = f(x, y),$$

da cui segue che

$$z = f(x, y_0) = \varphi(x)$$

rappresenta l'equazione della proiezione ortogonale di Γ sul piano xz, la quale avrà in Q_0 (proiezione di M_0 sul piano xz) una tangente il cui coefficiente angolare è dato da

$$\varphi'(x_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Se poi osserviamo che la tangente in Q_0 alla curva proiezione risulta parallela alla tangente in M_0 alla curva sezione col piano $y = y_0$, possiamo anche dire che la $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ rappresenta la tangente trigonometrica dell'angolo che la tangente in M_0 alla Γ forma col piano xy,

Analoga considerazione si può tenere per quanto riguarda la $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ e quindi enunciare il **Risultato**:

Le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, *calcolate nel punto* P_0, *individuano le direzioni in* M_0 *di due certe curve piane tracciate sulla superficie di equazione* $z = f(x,y)$, *passanti per* M_0 *e tra loro ortogonali.*

Quando una funzione, continua in un dominio D, ammette in un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ entrambe le derivate parziali, si suol dire brevemente che in P_0 *la funzione è parzialmente derivabile.*

4) Sorge allora spontanea la questione di determinare l'equazione, del piano passante per M_0 e contenente le due tangenti t_1 e t_2 alle curve sezioni della superficie con i due piani di equazioni $y = y_0$ e $x = x_0$;

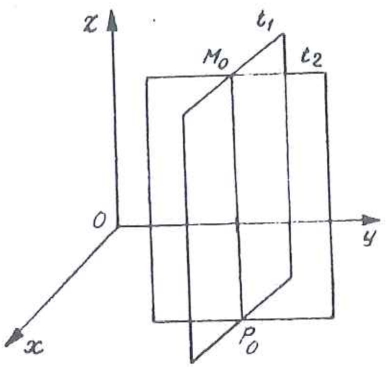

Figura 6.3:

avremo intanto (fig.6.3)

$$\begin{cases} \text{equazioni della } t_1: & z - z_0 = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0); \quad y - y_0 = 0, \\ \text{equazioni della } t_2: & z - z_0 = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0); \quad x - x_0 = 0; \end{cases}$$

d'altra parte l'equazione di un piano generico passante per M_0 è data da

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{6.1}$$

ed allora, se vogliamo che la retta t_1 appartenga ad esso, dovremo introdurre in questa le equazioni della t_1, il che porta alla condizione

$$a(x - x_0) + c(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow a = -c\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Analogamente, se vogliamo che il piano contenga anche la t_2, otteniamo la condizione $b = -c\frac{\partial f}{\partial y}$, dopo di che, se introduciamo queste condizioni nella (6.1) si ottiene

$$-c\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) - c\frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Rightarrow z - z_0 = \frac{\partial f(x_0 y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0 y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

che è appunto l'equazione cercata.

Dimostreremo in seguito che il piano così trovato non solo contiene le due tangenti t_1 e t_2 ma anche le tangenti a tutte le curve tracciate sulla superficie e passanti per il punto M_0; per questa ragione il piano in discorso suol chiamarsi il *piano tangente alla superficie nel punto* M_0.

5) *Derivate di ordine superiore.*

Supponiamo che la funzione $z = f(x,y)$ sia parzialmente derivabile in tutti i punti di un dominio D del piano xy, così che esistano in ogni punto di D le due derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y};$$

tali derivate risulteranno a loro volta funzioni di x, y che indicheremo brevemente con $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$, cioè porremo

$$f_1(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_2(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Supponiamo ora che queste due nuove funzioni f_1 ed f_2 siano a loro volta parzialmente derivabili, cioè che esistano le

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) & ; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) & ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \end{cases}$$

queste nuove derivate le chiameremo le *derivate parziali seconde* della funzione $f(x,y)$ rispetto ad x e rispetto ad y e le indicheremo rispettivamente con i simboli

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

che si leggono:

derivata parziale seconda rispetto ad x due volte
derivata parziale seconda rispetto ad x e rispetto ad y
derivata parziale seconda rispetto ad y e rispetto ad x
derivata parziale seconda rispetto ad y due volte.

In altre parole si ha il seguente schema di formazione

$$f(x,y) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{cases} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{cases} \end{cases}$$