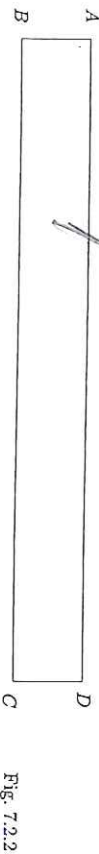


Supponiamo ora che S sia una superficie *generalmente regolare*, cioè l'unione di un numero finito di superficie regolari S_1, S_2, \dots, S_m (con i relativi domini base misurabili) aventi a due a due in comune al più punti dei loro bordi. Inoltre $S = \bigcup_{k=1}^m S_k$ sia una superficie *dotata di due distinte pagine* cosicché sia possibile orientarla, attraverso la scelta di una delle pagine da indicare (come positiva) $+S$; ciò induce un orientamento sulle superficie componenti: siano $+S_1, +S_1, \dots, +S_m$ le rispettive pagine positive. Si pone allora per definizione

$$\int_{+S} X \, dy \, dz + Y \, dz \, dx + Z \, dx \, dy = \sum_{k=1}^m \int_{+S_k} X \, dy \, dz + Y \, dz \, dx + Z \, dx \, dy. \quad (7.2.7)$$

Osservazione I - Per l'applicabilità della (7.2.7) si è supposto che S sia una superficie a due pagine, in modo da poterne scegliere una come positiva. Tale condizione potrebbe sembrare superflua, ma così non è. Esistono infatti superficie "unilateri" cioè ad una sola pagina.

L'esempio più classico è il cosiddetto *nastro di Möbius*, riportato nella figura 7.2.1. Esso può costruirsi a partire da una striscia di carta a forma di rettangolo molto allungato, che è una superficie a due pagine: quella superiore ombreggiata, quella inferiore bianca. Siano A, B, C, D i vertici successivi (fig. 7.2.2). Posta la striscia in \mathbb{R}^3 la si incollì lungo i lati minori in modo che D coincida con B ed A con C . Se ora si immagina di "dipingere" in modo ombreggiato quella che si ritiene una pagina del nastro si finisce, per continuità, per dipingere allo stesso modo anche la parte precedentemente bianca. Dunque il nastro ha una sola faccia o pagina, quindi non è orientabile.



7.3 Flusso di un campo vettoriale

Con le notazioni dei § 7.1, 7.2, sia S una superficie regolare con dominio base misurabile. Orientata *arbitrariamente* S , sia $+S$ la pagina positiva e \vec{n} la corrispondente normale positiva.

Sia $\vec{\Phi}$ un campo vettoriale definito in un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^3$ contenente S ; per ogni x, y, z di E si abbia $\vec{\Phi} \equiv [X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)]$, le tre funzioni

X, Y, Z essendo funzioni continue assegnate. Ciò posto definiremo *flusso* del vettore (o del campo vettoriale) $\vec{\Phi}$ attraverso la superficie S , orientata secondo \vec{n} , la quantità scalare data dal seguente integrale superficiale

$$\int_S \vec{\Phi} \cdot \vec{n} \, d\sigma, \quad (7.3.1)$$

ove l'espressione $\vec{\Phi} \cdot \vec{n} \, d\sigma$ prende il nome di *flusso elementare*.

È allora evidente, [vedi (7.2.3)] ricorrendo alle componenti X, Y, Z , la relazione

$$\int_S \vec{\Phi} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_{+S} X \, dy \, dz + Y \, dz \, dx + Z \, dx \, dy, \quad (7.3.2)$$

cosicché all'integrale superficiale di una forma differenziale bilineare può essere dato il significato di flusso.

Questo concetto, che ha notevoli applicazioni, ha origini "idrodinamiche". Supponiamo che lo spazio $E \supset S$ sia occupato da un "fluido" in movimento; in tale caso chiameremo "*flusso del fluido*" attraverso la superficie S , la massa del fluido che attraversa S nell'*unità di tempo entrando dalla pagina negativa, diminuita della massa che nello stesso tempo attraversa S in senso contrario*.

Sia \vec{v} la velocità delle particelle nell'attraversare $d\sigma$; nel tempo *unitario* ogni particella si sposta di \vec{v} e quindi le particelle che attraversano $d\sigma$ in questo tempo, sono quelle contenute nel "prisma" (fig. 7.3.1) ottenuto riportando da tutti i punti di $d\sigma$, nella direzione di \vec{v} , segmenti di lunghezza $|\vec{v}|$. Il volume di tale insieme [area di base $d\sigma$, per l'altezza $h = \vec{v} \cdot \vec{n}$] è dato da $\vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma$. Perciò se ρ è la densità del fluido, la massa passata attraverso $d\sigma$ nell'unità di tempo, cioè il *flusso elementare*, è data da

$$\rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma. \quad \text{Fig. 7.3.1}$$

Dopo ciò il flusso (totale) attraverso la superficie S , posto $\vec{\Phi} = \rho \vec{v}$, è dato secondo la (7.3.2) da

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma. \quad (7.3.3)$$

7.4 Superficie coerentemente orientate; teorema di Stokes

In questo § tratteremo l'integrazione di forme differenziali bilineari di \mathbb{R}^3 su superficie regolari S dotate di bordo BS "*sufficientemente regolare*".

Riprendendo le equazioni parametriche di S [vedi ad esempio § 5.13]

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v); \quad (u, v) \in D, \quad (7.4.1)$$

facciamo l'ulteriore ipotesi che il dominio D sia regolare secondo la definizione data nel § 6.4. Allora, poiché ∂D è costituita da un numero finito di curve regolari aventi in comune a due a due al più i punti estremi, anche il corrispondente (biunivocamente) BS sarà costituito da un numero finito di curve regolari di \mathbb{R}^3 , aventi analogo comportamento. In tale circostanza si può stabilire un orientamento coerente tra la superficie S e BS .

Fissato su BS un arbitrario orientamento positivo $+BS$, associamo ad esso la pagina positiva $+S$ della superficie data in modo che (fig. 7.4.1) un osservatore che percorra BS nel verso fissato come positivo $+BS$, camminando sulla pagina positiva $+S$, lasci "intorno" di S alla sua sinistra. Naturalmente, basta eseguire questo accordo coerente tra $+BS$ e $+S$ in un qualsiasi punto (non singolare) di BS .

In termini geometrici tale coerenza si può precisare così: detto $\vec{\tau}$ il vettore della retta tangente a BS , in un punto $P \in BS$, orientato come $+BS$ ed indicato con \vec{v} il vettore di una retta giacente sul piano tangente in P ad S , orientato positivamente verso i punti interni di S , si orienti in conseguenza la normale positiva \vec{n} ad S in P (cioè si fissi la pagina $+S$) in modo che la terna $\vec{\tau}, \vec{v}, \vec{n}$ sia disposta come la terna x, y, z , cioè risulti (essendo $0 < \overrightarrow{\tau v} < \pi$)

$$\vec{\tau} \wedge \vec{v} \cdot \vec{n} > 0. \quad (7.4.2)$$

In particolare se \vec{v} è ortogonale a $\vec{\tau}$, la terna "trirettangolo levogira" $\vec{\tau}, \vec{v}, \vec{n}$ è sovrapponibile in direzione e verso (cioè è congruente) alla x, y, z . È evidente che invertendo l'orientamento di BS , si inverte anche quello di S e viceversa.

Tuttavia, scelta così la pagina positiva $+S$ di S , rimane da stabilire se \vec{n} risulta espresso da (7.1.4) o (7.1.5); è il problema che ci proponiamo di risolvere.

Ricordiamo che nel § 6.4, abbiamo stabilito una volta per tutte un verso positivo per la frontiera di un dominio regolare D , cioè quello che lascia l'interno del dominio "a sinistra". Cioè, detto Q un punto regolare di ∂D ed indicati con $\vec{\tau}_0$ il vettore della retta tangente in Q a ∂D orientato come $+\partial D$ e con \vec{v}_0 il vettore della "normale interna", la coppia $\vec{\tau}_0, \vec{v}_0$ risulta sovrapponibile in direzione e verso alla coppia u, v degli assi coordinati (fig. 7.4.2).

Per la corrispondenza biunivoca tra ∂D e BS , se $Q \in \partial D$ percorre ∂D nel verso positivo $+\partial D$ sopra definito, il punto corrispondente $P \in BS$, può percorrere

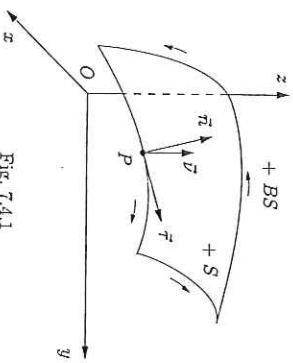


Fig. 7.4.1

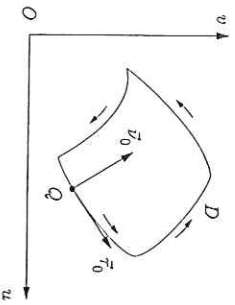


Fig. 7.4.2

il bordo BS in uno dei due modi seguenti:

- 1) P percorre tale bordo nel verso concorde a $+BS$ (fissato all'inizio);
- 2) P percorre tale bordo nel verso opposto a quello di $+BS$.

Ciò premesso possiamo risolvere immediatamente il problema del segno che compare nelle (7.1.4) e (7.1.5) per il vettore \vec{n} .

Teorema 7.4.1 - Nelle ipotesi di regolarità del dominio D , fissato arbitrariamente l'orientamento positivo del bordo $+BS$ ed orientata coerentemente la superficie S e detta $+S$ la sua pagina positiva ed \vec{n} il relativo vettore della normale (positiva) ad S , se all'orientamento positivo $+BS$ del bordo corrisponde biunivocamente quello positivo $+\partial D$ del dominio base di S , risulta

$$\vec{n} = (\vec{P}_u \wedge \vec{P}_v) / |\vec{P}_u \wedge \vec{P}_v|, \quad \forall P \in S; \quad (7.4.3)$$

se invece a $+BS$ corrisponde $-\partial D$ si ha

$$\vec{n} = -(\vec{P}_u \wedge \vec{P}_v) / |\vec{P}_u \wedge \vec{P}_v|, \quad \forall P \in S. \quad (7.4.4)$$

Dimostrazione - Basta dimostrare la prima relazione (l'altra divenendo poi immediata) in un punto $P \in BS$.

Osserviamo preliminarmente che se C_0 è una qualsiasi curva regolare tracciata in D , sulla quale si sia stabilito un orientamento positivo del tutto arbitrario, detta s l'ascissa curvilinea su C_0 si hanno equazioni parametriche del tipo

$$u = u(s), \quad v = v(s), \quad s \in [a, b], \quad (7.4.5)$$

ed in ogni punto $Q \in C_0$ corrispondente al valore s_0 del parametro, il vettore $\vec{\tau}_0$ della retta tangente in Q a C_0 , orientato nel verso delle s crescenti, è, dato da

$$\vec{\tau}_0 = [u'(s), v'(s)]. \quad (7.4.6)$$

Alla curva C_0 corrisponde su S una curva regolare C di equazioni parametriche

$$x = x[u(s), v(s)], \quad y = y[u(s), v(s)], \quad z = z[u(s), v(s)], \quad s \in [a, b], \quad (7.4.7)$$

che supporremo orientata positivamente nel verso delle s crescenti, onde detto $\vec{\tau}$ il vettore della retta tangente a C (orientata al crescere di s) nel punto P , corrisponderà biunivocamente a $Q \in C_0$, poiché

$$x' = u'x_u + v'x_v, \quad y' = u'y_u + v'y_v, \quad z' = u'z_u + v'z_v, \quad (7.4.8)$$

sono proporzionali ai coseni direttori di $\vec{\tau}$, risulta (vedi ad esempio (17.12.9) di "Analisi I")

$$\vec{\tau} = (u' \vec{P}_u + v' \vec{P}_v) / |u' \vec{P}_u + v' \vec{P}_v|, \quad (7.4.9)$$

le derivate essendo tutte calcolate per $s = s_0$.

Pertanto, data l'arbitrarietà di C_0 e di $Q \in C_0$, si è mostrato che ad ogni retta orientata $\vec{\tau}_0$ (di vettore $\vec{\tau}_0$) spiccata da un punto $Q \in D$ (nel piano uv) corrisponde su S una ben determinata retta $\vec{\tau}$ (di vettore $\vec{\tau}$) giacente nel piano tangente ad S nel punto P corrispondente biunivocamente a Q .

Allo stesso modo, operando su una curva per Q ortogonale a C_0 in Q , ed indicato con \vec{v}_0 il versore della relativa tangente orientata in modo che la coppia \vec{v}_0, \vec{v}_0 sia congruente alla coppia u, v , tenuto conto che

$$\vec{v}_0 = (-v', u') \quad (7.4.10)$$

come visto nel § 6.5, per il corrispondente versore \vec{v} sul piano tangente in P ad S si ha

$$\vec{v} = (-v' \vec{P}_u + u' \vec{P}_v) / |-v' \vec{P}_u + u' \vec{P}_v|. \quad (7.4.11)$$

Da (7.4.9) e (7.4.11) si ha perciò

$$\begin{aligned} \vec{r} \wedge \vec{v} &= pq(-u'v' \vec{P}_u \wedge \vec{P}_u + u'^2 \vec{P}_u \wedge \vec{P}_v - v'^2 \vec{P}_v \wedge \vec{P}_u + \\ &+ u'v' \vec{P}_v \wedge \vec{P}_v) = pq(\vec{P}_u \wedge \vec{P}_v), \end{aligned} \quad (7.4.12)$$

avendo indicato rispettivamente con p e q i fattori positivi che figurano in (7.4.9) e (7.4.11) e tenuto conto che $\vec{P}_u \wedge \vec{P}_u = \vec{0}$, $\vec{P}_v \wedge \vec{P}_v = \vec{0}$, $\vec{P}_u \wedge \vec{P}_v = -\vec{P}_v \wedge \vec{P}_u$. Per le ipotesi poste su ∂D , infatti su BS , se \vec{r}_0 è il versore della retta tangente in un punto regolare $Q \in \partial D$, orientato nel consueto verso $+\partial D$, \vec{v}_0 è quello della normale interna; \vec{r} è allora il versore della retta tangente in un punto $P \in BS$, che per le ipotesi fatte è orientata come $+BS$; \vec{v} è il versore di una retta giacente sul piano tangente in P ad S , orientato verso l'interno di S . Pertanto da (7.4.12) si ha in virtù di (7.4.3)

$$\vec{r} \wedge \vec{v} \cdot \vec{n} = pq |\vec{P}_u \wedge \vec{P}_v|^2 / |\vec{P}_u \wedge \vec{P}_v| > 0,$$

cioè la (7.4.2) quindi per ottenere l'orientamento coerente (7.4.2) di $+S$ è necessario scegliere per \vec{n} la determinazione (7.4.3). \square

Ciò posto, ecco l'enunciato del teorema di Stokes:

Teorema 7.4.II - Se S è una superficie regolare verificante le ipotesi del teorema precedente e se $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ sono tre funzioni tali da aversi $X, Y, Z, X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z, Z_x, Z_y, Z_z \in C^0(A)$ ove A designa un campo connesso contenente S , sussiste la formula

$$\begin{aligned} \int_{+S} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \\ = \int_{+BS} X dx + Y dy + Z dz, \end{aligned} \quad (7.4.13)$$

ove $+S$ denota la pagina positiva della superficie S orientata "coerentemente" al bordo $+BS$ secondo la convenzione stabilita.

Dimostrazione - Con le ipotesi enunciate, la dimostrazione è molto laboriosa; ci limiteremo perciò ad esporla supponendo in più che le tre funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$,

$z(u, v)$ siano dotate delle derivate parziali seconde miste x_{uv} , y_{uv} , z_{uv} continue in D e che esistono anche le tre derivate parziali X_x, Y_y, Z_z continue in A (3).

Basterà dimostrare separatamente le tre relazioni

$$\begin{aligned} \int_{+S} \frac{\partial X}{\partial z} dz dx - \frac{\partial X}{\partial y} dx dy &= \int_{+BS} X dx, & \int_{+S} \frac{\partial Y}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Y}{\partial z} dy dz &= \int_{+BS} Y dy, \\ \int_{+S} \frac{\partial Z}{\partial y} dy dz - \frac{\partial Z}{\partial x} dz dx &= \int_{+BS} Z dz, \end{aligned}$$

dalle quali la (7.4.13) segue per somma. Dimostriamo ad esempio la prima, le altre due essendo perfettamente analoghe.

Supponiamo anche che il verso $+BS$ corrisponda biunivocamente a $+\partial D$, cosicché si possa utilizzare la (7.4.3). Si ha quindi

$$\int_{+BS} X dx = \int_{\partial D} X[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right).$$

Trasformando l'integrale a secondo membro in un integrale doppio mediante le formule di Green-Gauss nel piano (teorema 6.4.II), risulta

$$\begin{aligned} \int_{+BS} X dx &= \iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial u} [X[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]] \frac{\partial x}{\partial v} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial v} [X[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]] \frac{\partial x}{\partial u} \right\} du dv = \\ &= \iint_D \left\{ \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} - X \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \right\} du dv = \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial z} M - \frac{\partial X}{\partial y} N \right) du dv. \end{aligned}$$

Tenuto conto che in virtù di (7.4.3) si ha

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \left(\frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}} \right) \equiv \\ &\equiv (\cos \vec{x}\vec{n}, \cos \vec{y}\vec{n}, \cos \vec{z}\vec{n}), \end{aligned}$$

(3) Cosicché, complessivamente, si ha $X, Y, Z \in C^1(A)$.

si può scrivere

$$\begin{aligned} \int_{+BS} X dx &= \iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial z} \cos \gamma \bar{n} - \frac{\partial X}{\partial y} \cos \alpha \bar{n} \right) \sqrt{L^2 + M^2 + N^2} du dv = \\ &= \int_S \left(\frac{\partial X}{\partial z} \cos \gamma \bar{n} - \frac{\partial X}{\partial y} \cos \alpha \bar{n} \right) do; \end{aligned}$$

ma per la (7.2.5), quest'ultimo integrale non è altro che l'integrale superficiale $\int_{+S} \frac{\partial X}{\partial z} dx - \frac{\partial X}{\partial y} dx dy$. \square

Il teorema di Stokes assume una interessante forma vettoriale suscettibile di notevoli applicazioni. Seguiremo pertanto le notazioni dei § 6.3 e 7.3.

Nell'aperto connesso $A \subseteq \mathbb{R}^3$ sia assegnato un campo vettoriale $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$ e si abbia $V(x, y, z) \in A$

$$\vec{f}(x, y, z) = [X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)], \quad (7.4.14)$$

ove $X, Y, Z, X_x, Y_x, Z_x, X_y, Y_y, Z_y$, siano funzioni continue in A .

Introdotta il rotore di \vec{f} dato (con ovvio significato dei simboli) da

$$\text{rot } \vec{f} = (Z_y - Y_z, X_z - Z_x, Y_x - X_y) \quad (7.4.15)$$

e tenendo conto di (7.3.2), la (7.4.13) si scrive, per ogni superficie regolare $S \subset A$

$$\int_S \text{rot } \vec{f} \cdot \bar{n} d\sigma = \int_{+BS} \vec{f} \cdot \bar{\tau} ds, \quad (7.4.16)$$

ove s è l'ascissa curvilinea su BS e $\bar{\tau}$ il versore della tangente a BS , orientata coerentemente con $+S$.

Seguendo il § 7.3, la (7.4.16) può leggersi:

Teorema 7.4.III - Nelle ipotesi poste per \vec{f} e S , comunque si fissi una superficie regolare $S \subset A$ avente come bordo BS , e si orienti coerentemente S e BS (fissati cioè $+S$ e $+BS$), il flusso del rotore di \vec{f} attraverso S è uguale alla circolazione del vettore \vec{f} lungo il bordo BS (nel verso prefissato). Pertanto il flusso (totale) ha il medesimo valore su tutte le superficie (orientate) che hanno un medesimo bordo (orientato).

Osservazione I - Il teorema di Stokes (in forma scalare o vettoriale) può essere esteso al caso in cui S è una superficie generalmente regolare orientabile (cioè a due pagine). Seguendo § 7.2, osservazione I, intendiamo riferirci a superficie S unione di un numero finito di superficie regolari S_1, S_2, \dots, S_m con bordi BS_1, BS_2, \dots, BS_m ciascuno formato da un numero finito di curve regolari aventi al più in comune i

7.5 Condizioni per l'integrabilità in \mathbb{R}^3 di una forma differenziale lineare

- 2) sia possibile orientare ciascuna superficie S_k ed il relativo bordo BS_k in modo (coerente) che se l'intersezione $BS_h \cap BS_k$ non è vuota, i versi su essa di $+BS_h$ e $+BS_k$ siano opposti (vedi fig. 7.4.3).

Naturalmente nella (7.4.13) o nella (7.4.16) il primo membro va calcolato come somma degli m integrali superficiali relativi alle m superficie orientate; nel secondo, $+BS$ è l'unione dei bordi orientati $+BS_1, +BS_2, \dots, +BS_m$, avendo soppresso le eventuali loro intersezioni a due a due (fig. 7.4.3).

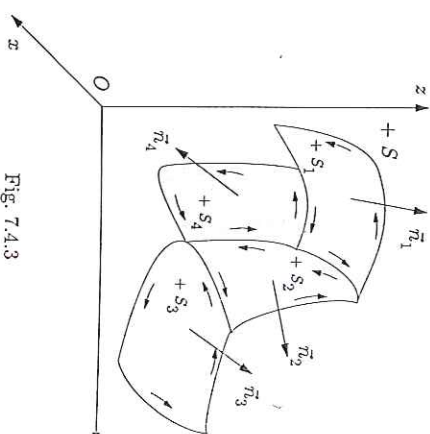


Fig. 7.4.3

Osservazione II - La superficie S di cui sopra può risultare aperta, cioè dotata di bordo BS , oppure chiusa, cioè priva di bordo (dopo aver effettuato le prescissioni). In quest'ultimo caso, l'integrale curvilineo esteso a $+BS$ a membro di (7.4.13) va posto uguale a zero.

Si osservi anche che quanto detto non è applicabile a superficie ad una pagina, come il nastro di Möbius (fig. 7.2.1).

7.5 Condizioni per l'integrabilità in \mathbb{R}^3 di una forma differenziale lineare

Data la forma differenziale lineare $X dx + Y dy + Z dz$, supponiamo che funzioni X, Y, Z siano tali da averci $X, Y, Z, X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z, Z_x, Z_y, Z_z \in C^0(A)$, co campo connesso dello spazio xyz ; siano inoltre soddisfatte in A le tre condizioni

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}, \quad (7.$$

che, nelle ipotesi qualitative poste per X, Y, Z , sappiamo (§ 6.3) essere necessarie (ma in generale non sufficienti) affinché la forma differenziale sia integrabile esatta) in A .

Si ha allora il teorema seguente:

Teorema 7.5.I - Se valgono le (7.5.1), allora comunque si fissi una superficie S generalmente regolare ed aperta, contenuta in A , di bordo BS , risulta