CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE - UNIVERSITÀ "LA SAPIENZA", ROMA
CORSO DI ANALISI MATEMATICA 2 (LETTERE M - Z) - a. a. 2007/'08
FORMULARIO SINTETICO DI ANALISI MATEMATICA 2

Coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases} \quad , \ \rho \in [0, +\infty) \ , \ \theta \in [0, 2\pi)$$

Coordinate polari centrate in $P_0 \equiv (x_0, y_0)$

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos(\theta) \\ y = y_0 + \rho\sin(\theta) \end{cases} \quad , \ \rho \in [0, +\infty) \ , \ \theta \in [0, 2\pi)$$

Coordinate ellittiche

$$\begin{cases} x = a\rho\cos(\theta) \\ y = b\rho\sin(\theta) \end{cases} \quad , \ \rho \in [0, +\infty) \ , \ \theta \in [0, 2\pi) \ , \ a, b > 0$$

Coordinate ellittiche centrate in $P_0 \equiv (x_0, y_0)$

$$\begin{cases} x = x_0 + a\rho\cos(\theta) \\ y = y_0 + b\rho\sin(\theta) \end{cases} \quad , \ \rho \in [0, +\infty) \ , \ \theta \in [0, 2\pi) \ , \ a, b > 0$$

Differenziale totale e differenziabilità

Sia f derivabile nel punto interno $P_0 \equiv (x_0, y_0)$.

$$df(P_0) := f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy = \overrightarrow{\nabla} f(P_0) \cdot \overrightarrow{dP}$$

f è differenziabile in $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ se

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta f - df(P_0)}{\rho} = 0$$

dove $\rho = |\overrightarrow{\Delta P}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Formule di riduzione per gli integrali doppi

Se T è un dominio normale rispetto all'asse x (o y-semplice):

$$T = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid a \le x \le b \ ; \ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\} \quad , \quad \alpha, \beta \in C^0([a, b])$$

$$\iint_T f(x, y)\ dxdy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy \ .$$

Se T è un dominio normale rispetto all'asse y (o x-semplice):

$$T = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid c \le y \le d \ ; \ \gamma(y) \le x \le \delta(y)\} \quad , \quad \gamma, \delta \in C^0([c, d])$$

$$\iint_T f(x,y)\ dxdy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)dx\ .$$

Area di un dominio normale

Se T è un dominio normale rispetto all'asse x (o y-semplice):

$$T = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid a \leq x \leq b\ ;\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\} \quad , \quad \alpha, \beta \in C^0([a,b])$$

$$Area(T) = \int_a^b [\beta(x) - \alpha(x)]dx\ .$$

Se T è un dominio normale rispetto all'asse y (o x-semplice):

$$T = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid c \leq y \leq d\ ;\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\} \quad , \quad \gamma, \delta \in C^0([c,d])$$

$$Area(T) = \int_c^d [\delta(y) - \gamma(y)]dy\ .$$

Formule di trasformazione di coordinate nel piano

Data la trasformazione invertibile di coordinate

$$\Phi : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad , \ \Phi \in C^1(A)\ ,\ A \subseteq I\!R^2\ ,\ J(u,v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{in } A\ ,$$

$$A = \Phi(T)\ ,\ T = \Phi^{-1}(A)\ ,$$

cioè tale che

$$\Phi^{-1} : \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \quad , \ J(x,y) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \neq 0\ ,\ J(x,y) = \frac{1}{J(u,v)}\ ,$$

$$\iint_T f(x,y)\ dxdy = \iint_A f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|\ dudv\ .$$

Coordinate polari: $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases} \quad , \ \rho \in (0, +\infty)\ ,\ \theta \in [0, 2\pi)\ ,\ J(\rho,\theta) = \rho :$

$$\iint_{T(x,y)} f(x,y)\ dxdy = \iint_{A(\rho,\theta)} f(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))\rho\ d\rho d\theta\ .$$

N.B.: in base a noti teoremi, la validità della formula di trasformazione in coordinate polari può essere estesa a $(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi]$.

Volume di un dominio normale rispetto al piano (x,y)

Dato il dominio

$$T = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \mid (x,y) \in A \subseteq I\!R^2\ ,\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\ ,\ \alpha, \beta \in C^0(A)\}$$

$$Vol(T) = \iint_A [\beta(x,y) - \alpha(x,y)] \; dxdy \; .$$

Volume di un solido di rotazione

Dato il solido T ottenuto ruotando attorno all'asse z il rettangoloide

$$R = \{(x,z) \in I\!R^2 \mid z \in [c,d] \; , \; 0 \le x \le f(z)\} \; ,$$

detta x_B l'ascissa del baricentro di R,

$$Vol(T) = 2\pi \int_c^d dz \int_0^{f(z)} x \; dx = \pi \int_c^d [f(z)]^2 dz = 2\pi \cdot x_B \cdot Area(R)$$

Formule di Dirichlet

Data $f \in C^0(D)$, $D \subseteq I\!R^2$,

Caso I. Funzione pari nella variabile x ($f(x,y) = f(-x,y)$) e dominio D simmetrico rispetto all'asse y: detto $D_1 = D \cap \{(x,y) \in I\!R^2 \mid x \ge 0\}$

$$\iint_D f(x,y) \; dxdy = 2 \iint_{D_1} f(x,y) \; dxdy \; .$$

Caso II. Funzione dispari nella variabile x ($f(x,y) = -f(-x,y)$) e dominio D simmetrico rispetto all'asse y:

$$\iint_D f(x,y) \; dxdy = 0 \; .$$

Caso III. Funzione pari nella variabile y ($f(x,y) = f(x,-y)$) e dominio D simmetrico rispetto all'asse x: detto $D_2 = D \cap \{(x,y) \in I\!R^2 \mid y \ge 0\}$

$$\iint_D f(x,y) \; dxdy = 2 \iint_{D_2} f(x,y) \; dxdy \; .$$

Caso IV. Funzione dispari nella variabile y ($f(x,y) = -f(x,-y)$) e dominio D simmetrico rispetto all'asse x:

$$\iint_D f(x,y) \; dxdy = 0 \; .$$

Forme differenziali lineari

$$\omega(x,y) = X(x,y)dx + Y(x,y)dy \qquad \text{forma differenziale}$$

$$\overrightarrow{F} = (X(x,y), Y(x,y)) \qquad \text{campo vettoriale associato alla forma}$$

Integrale curvilineo di forma differenziale

Se X , $Y \in C^0(A)$, $A \subseteq I\!R^2$ connesso, data la curva regolare del piano

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad , \quad t \in [t_1, t_2] \quad , \quad P(t_1) = P_1 \; , \; P(t_2) = P_2$$

allora

$$\int_{\gamma(P_1,P_2)} \omega := \int_{t_1}^{t_2} [X(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + Y(x(t),y(t)) \cdot y'(t)] \, dt \ .$$

Metodi per il calcolo delle primitive $V(x,y)$ di una forma differenziale esatta

Primo metodo: dato $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ e il generico punto $P \equiv (x,y)$, $P_0, P \in A$,

$$V(x,y) = \int_{x_0}^{x} X(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Y(x,t)dt + C$$

oppure

$$V(x,y) = \int_{y_0}^{y} Y(x_0,t)dt + \int_{x_0}^{x} X(t,y)dt + C \ .$$

Secondo metodo:

$$\int X(x,y)dx = V(x,y) + \phi(y)$$

$$\frac{d\phi}{dy} = -\frac{\partial V}{\partial y} + Y(x,y)$$

oppure

$$\int Y(x,y)dy = V(x,y) + \psi(x)$$

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{\partial V}{\partial x} + X(x,y)$$

Equazione della retta tangente a una curva regolare del piano nel punto di coordinate $(x(t), y(t))$

$$\frac{y - y(t)}{y'(t)} = \frac{x - x(t)}{x'(t)}$$

Componenti del versore tangente a una curva regolare del piano nel punto di coordinate $(x(t), y(t))$

$$vers(\overrightarrow{\tau}) = \left(\frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \ , \ \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right) \ .$$

Componenti del versore della normale interna a una curva regolare del piano nel punto di coordinate $(x(t), y(t))$

$$vers(\overrightarrow{n_i}) = \left(-\frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \ , \ \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right) \ .$$

Lunghezza di una curva regolare

Data la curva regolare del piano

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad , \qquad t \in [t_1, t_2] \qquad , \qquad P(t_1) = P_1 \ , \ P(t_2) = P_2$$

allora

$$l(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\ dt\ .$$

Se la curva γ è grafico della funzione $y = f(x)$, $f \in C^1([a,b])$, allora

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx\ .$$

Equazione del piano tangente Π_{P_0} a una superficie regolare nel punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$

Data la superficie S grafico della funzione $z = f(x,y)$, $f \in C^1(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, il piano tangente Π_{P_0} ha equazione

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \cdot (y - y_0)$$

Componenti del versore della normale interna alla superficie regolare nel punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$

$$vers(\overrightarrow{n_i}) = \left(\frac{f_x(P_0)}{\sqrt{(f_x(P_0))^2 + (f_y(P_0))^2 + 1}}\ ,\ \frac{f_y(P_0)}{\sqrt{(f_x(P_0))^2 + (f_y(P_0))^2 + 1}}\ ,\ \frac{-1}{\sqrt{(f_x(P_0))^2 + (f_y(P_0))^2 + 1}} \right)$$

Area della superficie

$$Area(S) = \iint_A \sqrt{(f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2 + 1}\ \ dxdy$$

Baricentri e momenti di inerzia

<u>**Tutte le formule vanno intese per corpi aventi densità di massa uniforme e di massa unitaria.**</u>

Coordinate del baricentro di un corpo γ filiforme nel piano, di equazione

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad , \quad t \in [t_1, t_2] \quad , \quad P(t_1) = P_1\ ,\ P(t_2) = P_2$$

$$x_B = \frac{1}{l(\gamma)} \int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\ dt \quad ; \quad y_B = \frac{1}{l(\gamma)} \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\ dt\ .$$

Coordinate del baricentro di un corpo D bidimensionale:

$$x_B = \frac{1}{Area(D)} \iint_D x\ dxdy \quad ; \quad y_B = \frac{1}{Area(D)} \iint_D y\ dxdy\ .$$

Coordinate del baricentro di un dominio T tridimensionale:

$$x_B = \frac{1}{Vol(T)} \iiint_T x\ dxdydz \quad ; \quad y_B = \frac{1}{Vol(T)} \iiint_T y\ dxdydz \quad ; \quad z_B = \frac{1}{Vol(T)} \iiint_T z\ dxdydz\ .$$

Momento d'inerzia di un dominio T tridimensionale rispetto a un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$:

$$I_{P_0} = \iiint_T [dist(P_0, P)]^2 \, dxdydz = \iiint_T [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2] \, dxdydz \; .$$

Momento d'inerzia di un dominio T tridimensionale rispetto all'asse delle z (analogamente per i momenti d'inerzia rispetto agli altri due assi):

$$I = \iiint_T (x^2 + y^2) \, dxdydz \; .$$

Momento d'inerzia di un dominio T tridimensionale rispetto al piano (x, y) (analogamente per i momenti d'inerzia rispetto agli altri due piani coordinati):

$$I = \iiint_T z^2 \, dxdydz \; .$$

Divergenza e rotore

Dato il campo vettoriale $\overrightarrow{F} = (X(x,y), Y(x,y)) \in C^1(D)$, $D \subseteq I\!R^2$,

$$div(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F} := \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \qquad ; \qquad rot(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F} := \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \overrightarrow{k} \; .$$

Dato il campo vettoriale $\overrightarrow{F} = (X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)) \in C^1(T)$, $T \subseteq I\!R^3$,

$$div(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F} := \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \; ;$$

$$\overrightarrow{rot(\overrightarrow{F})} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X(x,y,z) & Y(x,y,z) & Z(x,y,z) \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \overrightarrow{k}$$

Formule di Gauss-Green in due dimensioni:

Dato un dominio regolare e limitato $D \subset I\!R^2$, considerate $f, g \in C^1(D)$,

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} \, dxdy = \int_{+\partial D} f \, dy \qquad ; \qquad \iint_D \frac{\partial g}{\partial y} \, dxdy = -\int_{+\partial D} g \, dx \qquad ;$$

Applicazioni

$$Area(D) = \int_{+\partial D} x \, dy = \int_{+\partial D} y \, dx = \frac{1}{2} \int_{+\partial D} (x \, dy - y \, dx)$$

<u>Teorema della Divergenza in due dimensioni:</u>

$$\iint_D div(\overrightarrow{F}) dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dxdy = \int_{+\partial D} (X \, dy - Y \, dx) = \int_{+\partial D} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_e} ds$$

Teorema del Rotore (o di Stokes) in due dimensioni:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy = \int_{+\partial D} (X \; dx + Y \; dy)$$

Teorema del Rotore (o di Stokes) in tre dimensioni:

Data una superficie S, grafico della funzione regolare $z = f(x, y)$, definita su un dominio regolare D, fissato arbitrariamente l'orientamento positivo del bordo $+BS$ e orientati coerentemente S e il versore normale positivo $\overrightarrow{n}$, considerato il campo vettoriale $\overrightarrow{F} = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)) \in C^1(A)$, $S \subset A \subseteq I\!R^3$,

$$\Phi_S(\overrightarrow{rot(\overrightarrow{F})}) := \int_S \overrightarrow{rot(\overrightarrow{F})} \cdot \overrightarrow{n} dS = \int_{+BS} X \; dx + Y \; dy + Z \; dz \;\; =: \oint_{+BS} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\tau} ds$$

Equazioni differenziali a variabili separabili

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \qquad ; \qquad f \in C^0(I_x) \; , \; g \in C^0(I_y) \; .$$

Metodo della separazione delle variabili: ponendo $g(y) \not\equiv 0$, si risolve

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx \qquad \text{(integrale generale)}$$

Eventuali soluzioni singolari: si ottengono risolvendo $g(y) = 0$.

Equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti continui

$$y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x) \qquad ; \qquad a, b \in C^0(I)$$

Metodo del fattore integrante: $e^{-\int a(x)dx}$

$$e^{-\int a(x)dx} [y'(x) - a(x) \cdot y(x)] = e^{-\int a(x)dx} b(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left[e^{-\int a(x)dx} y(x) \right] = e^{-\int a(x)dx} b(x)$$

da cui

$$y(x) = e^{\int a(x)dx} \left[\int e^{-\int a(x)dx} b(x) dx + C \right]$$

ovvero, usando la funzione integrale,

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \left[\int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{t} a(\tau)d\tau} b(t) dt + y_0 \right] \qquad , \qquad x_0 \in I \; ,$$

dove, assegnato un Problema di Cauchy, $y_0 = y(x_0)$.

Equazioni differenziali di Bernoulli

$$y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x) \cdot y^{\alpha}(x) \qquad ; \qquad a, b \in C^0(I) \qquad ; \qquad \alpha \in I\!R \; , \; \alpha \notin \{0, 1\} \; .$$

Solo se $\alpha > 0$, occorre tener conto anche della soluzione singolare $y \equiv 0$.

Supposto $y \not\equiv 0$, si pone $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$, da cui

$$z'(x) = (1-\alpha)a(x)z(x) + (1-\alpha)b(x) \ .$$

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \text{equazione non omogenea o completa}$$
$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \quad \text{equazione omogenea}$$

Integrale generale $y_0(x)$ dell'equazione omogenea: chiamiamo λ_1 e λ_2 le soluzioni dell'equazione caratteristica (o secolare)

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \ .$$

I caso ($\Delta > 0 \ , \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \ , \ \lambda_1 \neq \lambda_2$) (radici reali e distinte):

$$y_0(x) = C_1 e^{\lambda_1 \cdot x} + C_2 e^{\lambda_2 \cdot x} \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \ .$$

II caso ($\Delta = 0 \ , \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$) (radici reali e coincidenti):

$$y_0(x) = C_1 e^{\lambda \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{\lambda \cdot x} \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \ .$$

III caso ($\Delta < 0 \ , \ \lambda_1 = \alpha + i\beta \ , \lambda_2 = \alpha - i\beta = \overline{\lambda_1} \in \mathbb{C}$) (radici complesse coniugate):

$$y_0(x) = e^{\alpha \cdot x} \left[C_1 \cdot \cos(\beta x) + C_2 \cdot \sin(\beta x) \right] \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \ .$$

Integrale generale $y(x)$ dell'equazione non omogenea: detti $y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ l'integrale generale dell'equazione omogenea associata e $\overline{y}(x)$ un integrale particolare dell'equazione non omogenea,

$$y(x) = y_0(x) + \overline{y}(x)$$

Metodo di Lagrange della variazione delle costanti

$$\overline{y}(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \ ,$$

dove

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

ovvero

$$C_1(x) = -\int \frac{f(x) y_2(x)}{W(x)} \, dx \qquad ; \qquad C_2(x) = \int \frac{f(x) y_1(x)}{W(x)} \, dx$$

dove $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ è il *Wronskiano* di y_1 e y_2.

Metodo di somiglianza

Si vedano anche le due pagine in fondo al formulario.

1) $f(x) = P_m(x)$,

con $P_m(x)$ polinomio di grado m in x:

$$\overline{y}(x) = p_m(x) \cdot x^h \ ,$$

dove h è la molteplicità (eventualmente nulla) della soluzione $\lambda = 0$ dell'equazione caratteristica e $p_m(x)$ è un generico polinomio di grado m in x.

2) $f(x) = e^{\eta x} P_m(x)$,

dove $\eta \in I\!R$, $P_m(x)$ polinomio di grado m in x:

$$\overline{y}(x) = e^{\eta x} q_m(x) \cdot x^h \ ,$$

dove h è la molteplicità (eventualmente nulla) della soluzione $\lambda = \eta$ dell'equazione caratteristica e $q_m(x)$ è un generico polinomio di grado m in x.

3) $f(x) = e^{\eta x}[P_m(x)\cos(\mu x) + Q_k(x)\sin(\mu x)]$,

dove $\eta, \mu \in I\!R$, $P_m(x)$, $Q_k(x)$ polinomi rispettivamente di grado m e k in x:

$$\overline{y}(x) = e^{\eta x}[p_n(x)\cos(\mu x) + q_n(x)\sin(\mu x)] \cdot x^h \ ,$$

dove h è la molteplicità (eventualmente nulla) della soluzione $\lambda = \eta + i\mu$ dell'equazione caratteristica e $p_n(x), q_m(x)$ sono generici polinomi di grado $n = \max\{k, m\}$ in x.

Principio di sovrapposizione

Data la generica equazione differenziale di ordine n lineare $L(y) = f$, con $f = f_1 + f_2$, se esistono y_1 e y_2 tali che $L(y_1) = f_1$ e $L(y_2) = f_2$, allora la funzione $y = y_1 + y_2$ soddisfa l'equazione $L(y) = f$.