ANALISI MATEMATICA 1
ING. CIVILE E ING. PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO

14/01/2022

Prof.ssa M.R. Lancia - Prof.ssa S. Marconi - Prof. E. Di Costanzo

Testo A

Cognome e nome..

Matricola .... Anno di immatricolazione ....

Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguiti e mettendo in evidenza ogni risposta.

1) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{e^{\frac{1}{x}}-1} & x < 0 \\ \lambda & x = 0 \\ \frac{x^\alpha}{\cos(x^2)-1} & x > 0 \end{cases}$$

determinare per quali valori dei parametri reali $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ la funzione risulta continua e derivabile in $x = 0$. Si ricorda lo sviluppo di Mac Laurin del coseno:
$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n+1})$.

2) Dato l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan(x^2) \ln^\alpha \left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^4+1}\, dx$$

- utilizzando opportuni criteri, studiarne la convergenza al variare del parametro reale α;
- per $\alpha = 0$ calcolare l'integrale mediante la sua definizione.

3) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y'' - y' = 1 + e^{-x}.$$

Stabilire inoltre se esistono valori delle costanti arbitrarie per le quali $y(x)$ ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$. In caso affermativo scrivere l'equazione dell'asintoto.

4) Dare la definizione di funzione derivabile in un punto. Dimostrare che una funzione derivabile in un punto è ivi continua. Che tipo di condizione fornisce? Commentare con esempi e controesempi. Vale un risultato analogo per le funzioni di più variabili?

ANALISI MATEMATICA 1
ING. CIVILE E ING. PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO
14/01/2022

Prof.ssa M.R. Lancia - Prof.ssa S. Marconi - Prof. E. Di Costanzo

Testo B

Cognome e nome..

Matricola .... Anno di immatricolazione ....

Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguiti e mettendo in evidenza ogni risposta.

1) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}} & x < 0 \\ \lambda & x = 0 \\ \frac{\ln(1-2x^4)}{x^\alpha} & x > 0 \end{cases}$$

determinare per quali valori dei parametri reali $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ la funzione risulta continua e derivabile in $x = 0$. Si ricorda lo sviluppo di Mac Laurin di $\ln(1+t)$:
$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + o(t^n)$.

2) Dato l'integrale improprio

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x \arcsin(x^2)}{\sin^\alpha(x^2)\sqrt{1-x^4}}\, dx$$

– utilizzando opportuni criteri, studiarne la convergenza al variare del parametro reale α;

– per $\alpha = 0$ calcolare l'integrale mediante la sua definizione.

3) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y'' - 2y' = 2 + e^x.$$

Stabilire inoltre se esistono valori delle costanti arbitrarie per le quali $y(x)$ ammette asintoto obliquo per $x \to -\infty$. In caso affermativo scrivere l'equazione dell'asintoto.

4) Dare la definizione di funzione continua in un punto. Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle. Darne l'interpretazione geometrica.