ANALISI MATEMATICA 1
ING. CIVILE E ING. PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO

12/01/2023

Prof.ssa M.R. Lancia – Prof. E. Di Costanzo – Prof.ssa G.Viola

Testo A

Cognome e nome..Matricola ....

Anno di immatricolazione ....**Bonus totale**..........

Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguiti e mettendo in evidenza ogni risposta.

1) Studiare il carattere della seguente serie, al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^x+1)^k}{2^k+1}.$$

2) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x - \frac{x^2}{2} + ax}{x^3} & x < 0 \\ b & x = 0 \\ \frac{\int_0^x (e^{t^2+1} - e) dt}{x} & x > 0 \end{cases}$$

stabilire se esistono valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ tali che la funzione risulta continua e derivabile in $x = 0$. Si ricorda lo sviluppo di Mac Laurin di $y = \cos t$:
$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n+1})$. Detta

$$g(x, y) = \frac{1 - \cos(xy) - \frac{x^2 y^2}{2}}{xy},$$

determinare il suo insieme di definizione A. Stabilire se esiste il piano tangente nel punto $P = (\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi})$ e scriverne l'equazione.

3) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(\cos x)y(1+\ln y)}{1-\sin x} \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

4) Dare la definizione di funzione derivabile in un punto. Dimostrare che una funzione derivabile in un punto è ivi continua. Che tipo di condizione fornisce? Commentare con esempi e controesempi. Vale un risultato analogo per le funzioni di più variabili?

ANALISI MATEMATICA 1
ING. CIVILE E ING. PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO

12/01/2023

Prof.ssa M.R. Lancia – Prof. E. Di Costanzo – Prof.ssa G.Viola

Testo B

Cognome e nome..Matricola ....

Anno di immatricolazione ....**Bonus totale**..........

Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguiti e mettendo in evidenza ogni risposta.

1) Studiare il carattere della seguente serie, al variare del parametro reale $x \in (0, +\infty)$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(\ln^2 x + 1\right)^k}{k^3 + \ln k + 1}.$$

2) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1-x^2+ax}{x^3} & x < 0 \\ b & x = 0 \\ \frac{\int_0^x (e^{t^2+2}-e^2)dt}{2x} & x > 0 \end{cases}$$

stabilire se esistono valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ tali che la funzione risulta continua e derivabile in $x = 0$. Si ricorda lo sviluppo di Mac Laurin della funzione $y = e^t$: $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + ... + \frac{t^n}{n!} + o(t^n)$.

Detta

$$g(x, y) = \frac{e^{(xy)^2} - 1 - x^2y^2}{xy},$$

determinare il suo insieme di definizione A. Stabilire se esiste il piano tangente nel punto $P = (1, 1)$ e scriverne l'equazione.

3) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \left(\ln \dfrac{1}{x}\right)(1+y^2)\arctan y \\ \\ y(e) = 1 \end{cases}$$

4) Dare la definizione di funzione continua in un punto. Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle. Darne l'interpretazione geometrica.

ANALISI MATEMATICA 1
ING. CIVILE E ING. PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO

12/01/2023

Prof.ssa M.R. Lancia – Prof. E. Di Costanzo – Prof.ssa G.Viola

Testo C

Cognome e nome..Matricola ....

Anno di immatricolazione ....**Bonus totale**..........

Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguiti e mettendo in evidenza ogni risposta.

1) Studiare il carattere della seguente serie, al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k + 1}{(2 + e^x)^k}.$$

2) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x^2 - \frac{x^4}{2} + ax}{x^5}, & x < 0 \\ b & x = 0 \\ \frac{\int_0^x (e^{t^4+1} - e)dt}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

stabilire se esistono valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ tali che la funzione risulta continua e derivabile in $x = 0$. Si ricorda lo sviluppo di Mac Laurin di $y = \cos t$:
$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n+1})$. Detta

$$g(x,y) = \frac{1 - \cos(xy)^2 - \frac{x^4y^4}{24}}{xy}$$

determinare il suo insieme di definizione A. Stabilire se esiste il piano tangente nel punto $P = (\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi})$ e scriverne l'equazione.

3) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(\sin x)(e - e^y)}{(1 + \cos x)e^y} \\ \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

4) Dare la definizione di funzione derivabile in un punto. Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange. Darne l'interpretazione geometrica.

ANALISI MATEMATICA 1
ING. CIVILE E ING. PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO

12/01/2023

Prof.ssa M.R. Lancia – Prof. E. Di Costanzo – Prof.ssa G.Viola

<u>Testo D</u>

Cognome e nome..Matricola ....

Anno di immatricolazione ....**Bonus totale**..........

Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguiti e mettendo in evidenza ogni risposta.

1) Studiare il carattere della seguente serie, al variare del parametro reale $x \in (0, +\infty)$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2 + \ln k + 1}{\left(1 + \ln^2 x\right)^k}.$$

2) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{(x-1)^2}-1-(x-1)^2+a(x-1)}{(x-1)^3}, & x < 1 \\ b & x = 1 \\ \frac{\int_0^{x-1}(e^{t^2+2}-e^2)dt}{2(x-1)}, & x > 1 \end{cases}$$

stabilire se esistono valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ tali che la funzione risulta continua e derivabile in $x = 1$. Si ricorda lo sviluppo di Mac Laurin della funzione $y = e^t$:
$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + ... + \frac{t^n}{n!} + o(t^n)$.

Detta

$$g(x, y) = \frac{e^{(x-1)^2(y-1)^2} - 1 - (x-1)^2(y-1)^2}{(x-1)(y-1)},$$

determinare il suo insieme di definizione A. Stabilire se esiste il piano tangente nel punto $P = (0, 0)$ e scriverne l'equazione.

3) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \left(1 + y^2\right) \arctan y \arctan x \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

4) Dare la definizione di minimo e massimo relativo. Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat. Che tipo di condizioni fornisce? Commentare con esempi e controesempi.