Esercizio: funzione integrale (A)

Data la funzione integrale:

$$F(x) = \int_0^x (1 + \sin^2 t) \tan t \, dt$$

determinare l'insieme di definizione, l'insieme di derivabilità e gli intervalli di monotonia.
Calcolare inoltre

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} F(x)$$

Soluzione

La funzione integranda è definita e continua per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, e poiché il primo estremo di integrazione è $x = 0$, la funzione integrale è definita e continua in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dove è anche derivabile.

$$F'(x) = (1 + \sin^2 x) \tan x$$

$(1 + \sin^2 x) > 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$F'(x) > 0$ ovvero la F è crescente per $0 < x < \frac{\pi}{2}$;
$F'(x) < 0$ ovvero la F è decrescente per $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} F(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \int_0^x (1 + \sin^2 t) \tan t \, dt$$

$$\int (1 + \sin^2 t) \tan t \, dt = \int \frac{1 + \sin^2 t}{\cos t} \sin t \, dt = \int \frac{2 - \cos^2 t}{\cos t} \sin t \, dt$$

Ponendo $z = \cos t$, $dz = -\sin t dt$

$$\int \frac{z^2 - 2}{z} \, dz = \int \left(z - \frac{2}{z}\right) dz = \frac{z^2}{2} - 2 \ln |z|$$

$$\int_0^x (1 + \sin^2 t) \tan t \, dt = \left(\frac{\cos^2 t}{2} - 2 \ln \cos t\right)\Bigg|_0^x =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{2} - 2 \ln \cos x - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} F(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\cos^2 x}{2} - \ln \cos x - \frac{1}{2}\right) = +\infty$$

Equazione in $\mathbb{C}$

(A) Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$

$$3z^2 - z^5 = 0$$

e disegnarne le soluzioni tali che $\mathrm{Re}(z) < 0$.

Soluzione

$$3z^2 - z^5 = 0 \iff z^2(3 - z^3) = 0$$

$\Rightarrow$ $z_1 = z_2 = 0$

$$3 - z^3 = 0 \iff z^3 = 3$$

Si applica la formula di De Moivre:

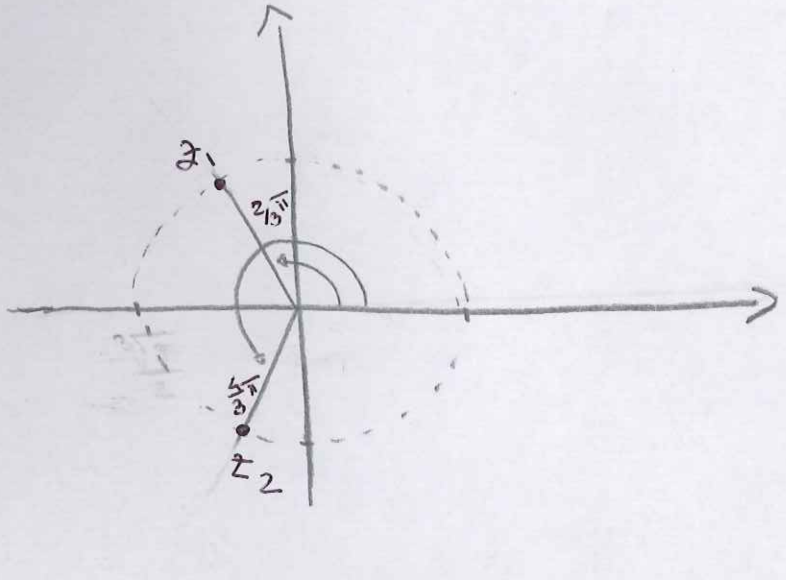
$$z_k = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{3}\right) \qquad k = 0,1,2$$

$$z_0 = \sqrt[3]{3}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{-\sqrt[3]{3}}{2} + \frac{\sqrt[4]{3}}{2}i$$

$$z_2 = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{-\sqrt[3]{3}}{2} - \frac{\sqrt[4]{3}}{2}i$$

queste sono le soluzioni con parte reale negativa



Esercizio: massimi e minimi vincolati per funzione in due variabili (A)

Determinare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = e^{(y-1)^2}\left(\frac{x^2}{2} - x\right)$$

limitatamente al quadrato Q di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ e $(0,2)$.

Soluzione

La funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}^2$.
Poiché il quadrato Q è chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo assoluti su Q.

Si cercano prima eventuali punti stazionari interni a Q.

$$\begin{cases} f_x(x,y) = e^{(y-1)^2}(x-1) = 0 \\ f_y(x,y) = 2(y-1)e^{(y-1)^2}\left(\frac{x^2}{2} - x\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

L'unico punto stazionario è il punto $P(1,1)$, che è interno a Q.
Le derivate seconde sono:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= e^{(y-1)^2} \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 2(y-1)e^{(y-1)^2}(x-1) \\ f_{yy}(x,y) &= 2e^{(y-1)^2}(2(y-1)^2+1)\left(\frac{x^2}{2} - x\right) \end{aligned}$$

e quindi il determinante della matrice Hessiana calcolata in P è

$$H_f(1,1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

ed essendo negativo, il punto P è un punto di sella, in cui la funzione vale $f(1,1) = -\frac{1}{2}$.

Si studiano ora i punti di massimo e minimo sulla frontiera di Q.

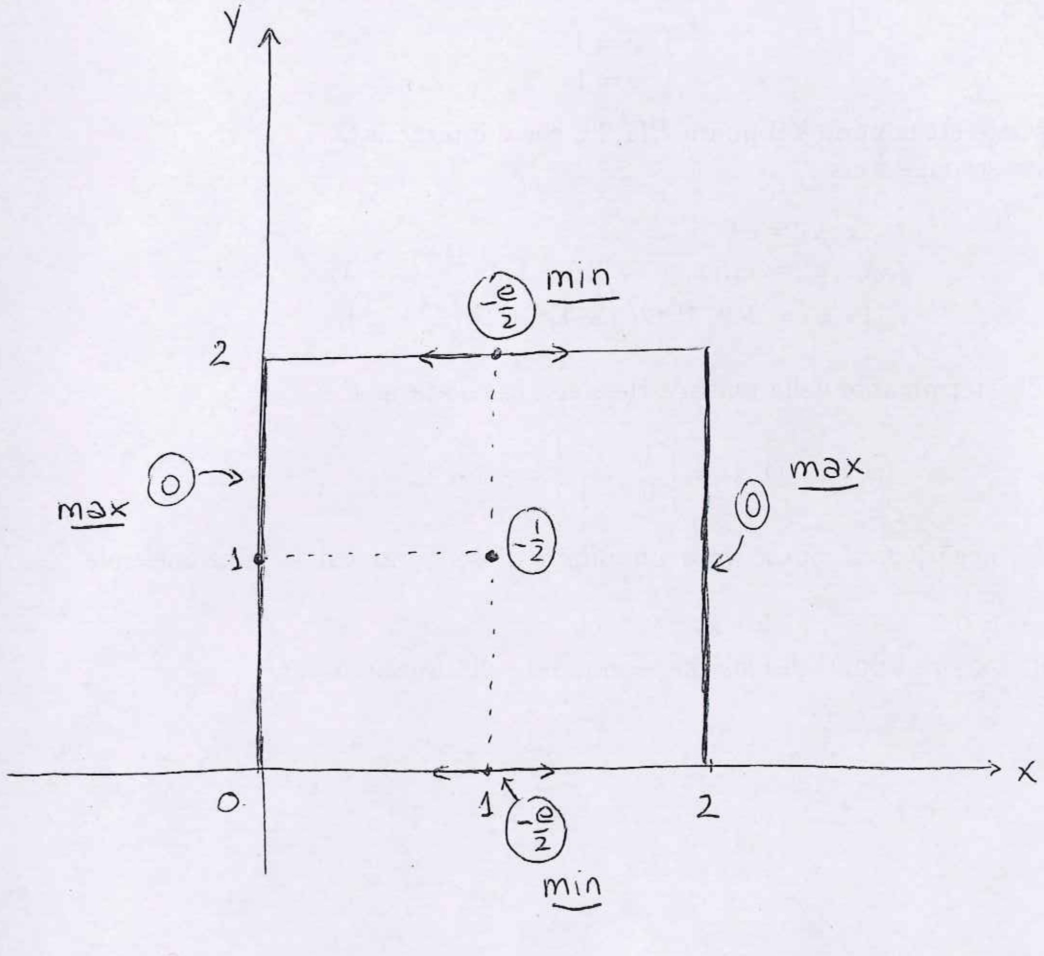
- Segmento da $(0,0)$ a $(2,0)$: $\gamma_1(t) = (t,0)$, $t \in [0,2]$.
  $f|_{\gamma_1}(t) = e\left(\frac{t^2}{2} - t\right)$
  $f|'_{\gamma_1}(t) = e(t-1) = 0$ per $t = 1$, punto di minimo, in cui la funzione vale $f|_{\gamma_1}(1) = -\frac{e}{2}$.
  Agli estremi: $f|_{\gamma_1}(0) = 0$ e $f|_{\gamma_1}(2) = 0$.

- Segmento da $(0,2)$ a $(2,2)$: $\gamma_2(t) = (t,2)$, $t \in [0,2]$.
  Stessa cosa.

- Segmento da $(0,0)$ a $(0,2)$: $\gamma_3(t) = (0,t)$, $t \in [0,2]$.
  $f|_{\gamma_3}(t) \equiv 0$.

- Segmento da $(2,0)$ a $(2,2)$: $\gamma_4(t) = (2,t)$, $t \in [0,2]$.
  $f|_{\gamma_4}(t) \equiv 0$.

Ricapitolando, i punti $(1,0)$ e $(1,2)$ sono punti di minimo assoluto, mentre tutti i punti dei segmenti γ_3 e γ_4 sono punti di massimo assoluto di f su Q.



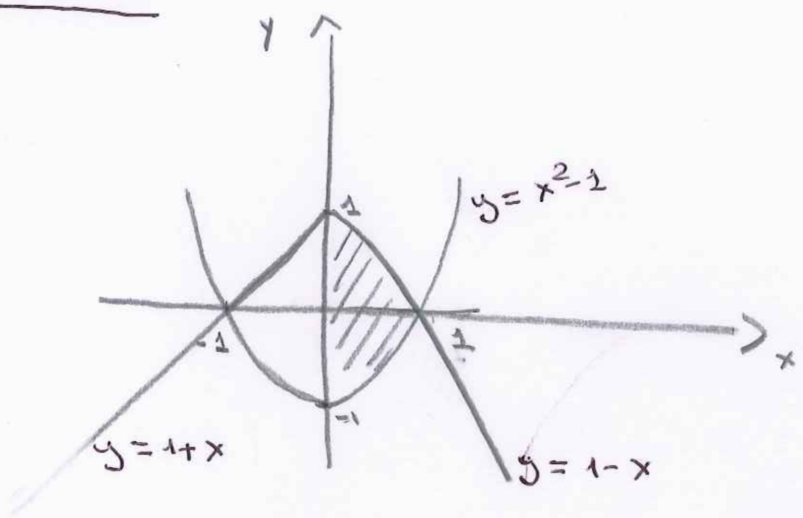
Integrale

(A) Risolvere il seguente integrale

$$\iint_T x e^x e^{|y-x^2+1|}\, dx\, dy$$

dove $T = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-1 \le y \le -|x|+1,\ x \geq 0 \}$

Soluzione



È un dominio normale rispetto all'asse x

$$\iint_T x e^x e^{|y-x^2+1|}\, dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^2-1}^{1-x} x e^x e^{|y-x^2+1|}\, dy =$$

$$\underset{\uparrow}{=} \int_0^1 dx \int_{x^2-1}^{1-x} x e^x e^{y-x^2+1}\, dy =$$

$$|y-x^2+1| = \begin{cases} y-x^2+1 & \text{se } y \geq x^2-1 & \text{sempre vero in } T \\ x^2-y-1 & \text{se } y < x^2-1 & \text{mai in } T \end{cases}$$

$$= \int_0^1 x e^{x-x^2} \cdot \left[e^{y+1} \right]_{x^2-1}^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 x\, e^{x-x^2} \left(e^{2-x} - e^{x^2} \right) dx = \int_0^1 x e^{2-x^2} +$$

$$+ \int_0^1 (-x e^x)\, dx = -\frac{1}{2} e^{2-x^2} \Big|_0^1 - x e^x \Big|_0^1 + \int_0^1 e^x\, dx =$$

$$= -\frac{3}{2} e + \frac{1}{2} e^2 + e^x \Big|_0^1 = -\frac{3}{2} e + \frac{1}{2} e^2 + e - 1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e}{2} - 1$$

Esercizio: equazione di Bernoulli (A)

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{1}{x-3}\, y(x) = \frac{1}{x+1}\, y^2(x) \\ \\ y(0) = \frac{4}{3\ln 3} \end{cases}$$

Soluzione

L'equazione proposta è di Bernoulli con parametro $\alpha = 2$.
La soluzione stazionaria particolare $y \equiv 0$ non è soluzione del problema di Cauchy.
L'equazione è definita per $x \neq 3$ e $x \neq -1$ e poichè il punto iniziale $x_0 = 0$ è compreso tra -1 e 3, si cerca la soluzione nell'intervallo $I = (-1, 3)$.

Risolvendo l'equazione si ha, dividendo per y^2:

$$y'y^{-2} + \frac{1}{x-3}\, y^{-1} = \frac{1}{x+1}.$$

Cambio di variabile: $z = y^{-1}$ $\qquad z' = -y^{-2}y'$.
Si ottiene l'equazione lineare in z:

$$z' - \frac{1}{x-3}\, z = -\frac{1}{x+1}$$

Fattore integrante (utilizzato il fatto che $x \in I$):

$$e^{-\int \frac{1}{x-3}\, dx} = e^{-\ln|x-3|} = e^{-\ln(3-x)} = \frac{1}{3-x}.$$

Moltiplicando per il fattore integrante:

$$\left(z\, \frac{1}{3-x}\right)' = -\frac{1}{x+1}\, \frac{1}{3-x}$$

$$z(x) = (3-x)\left[\int \frac{1}{(x+1)(x-3)}\, dx + c\right] \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{Ax - 2A + Bx + B}{(x+1)(x-3)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -3A + B = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$z(x) = (3-x)\left[\int \left(-\frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x-3)}\right) dx + c\right] \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$z(x) = (3-x)\left[-\frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x-3| + c\right] \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$z(x) = (3-x)\left[-\frac{1}{4}\ln(x+1) + \frac{1}{4}\ln(3-x) + c\right] \qquad c \in \mathbb{R} \quad (x \in I)$$

$$z(x) = (3-x)\left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{3-x}{x+1}\right) + c\right] \qquad c \in \mathbb{R}$$

Tramite la trasformazione inversa $y(x) = z^{-1}(x)$ si ottiene:

$$y(x) = \frac{1}{(3-x)\left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{3-x}{x+1}\right) + c\right]} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Imponendo ora la condizione iniziale:

$$y(0) = \frac{4}{3\ln 3} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{4}{3\ln 3} = \frac{1}{3\left(\frac{1}{4}\ln 3 + c\right)} \qquad \Longrightarrow \qquad c = 0$$

e quindi la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = \frac{1}{(3-x)\left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{3-x}{x+1}\right)\right]}$$

che è definita in $(-1,1) \cup (1,3)$ e dunque è soluzione locale in $(-1,1)$.