Esercizio: funzione integrale (B)

Data la funzione integrale:

$$F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} (1 + \cos^2 t) \cot t \, dt$$

determinare l'insieme di definizione, l'insieme di derivabilità e gli intervalli di monotonia.
Calcolare inoltre

$$\lim_{x \to \pi^-} F(x)$$

Soluzione

La funzione integranda è definita e continua per $x \neq k\pi$, e poiché il primo estremo di integrazione è $x = \frac{\pi}{2}$, la funzione integrale è definita e continua in $(0, \pi)$ dove è anche derivabile.

$$F'(x) = (1 + \cos^2 x) \cot x$$

$(1 + \cos^2 x) > 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$
$F'(x) > 0$ ovvero la F è crescente per $0 < x < \frac{\pi}{2}$;
$F'(x) < 0$ ovvero la F è decrescente per $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

$$\lim_{x \to \pi^-} F(x) = \lim_{x \to \pi^-} \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} (1 + \cos^2 t) \cot t \, dt$$

$$\int (1 + \cos^2 t) \cot t \, dt = \int \frac{1 + \cos^2 t}{\sin t} \cos t \, dt = \int \frac{2 - \sin^2 t}{\sin t} \cos t \, dt$$

Ponendo $z = \sin t$, $dz = \cos t dt$

$$\int \frac{2 - z^2}{z} dz = \int \left(\frac{2}{z} - z \right) dz = 2 \ln |z| - \frac{z^2}{2}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} (1 + \cos^2 t) \cot t \, dt = \left(2 \ln \sin t - \frac{\sin^2 t}{2} \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{x} =$$

$$= 2 \ln \sin t - \frac{\sin^2 t}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to \pi^-} F(x) = \lim_{x \to \pi^-} \left(2 \ln \sin t - \frac{\sin^2 t}{2} + \frac{1}{2} \right) = -\infty$$

(5) Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$

$$4z^7 - z^3 = 0$$

e disegnare le soluzioni tali che $\mathrm{Im}(z) > 0$ -

<u>Soluzione</u>

$$4z^7 - z^3 = 0 \iff z^3(4z^4 - 1) = 0$$

$\Rightarrow z_1 = z_2 = z_3 = 0$

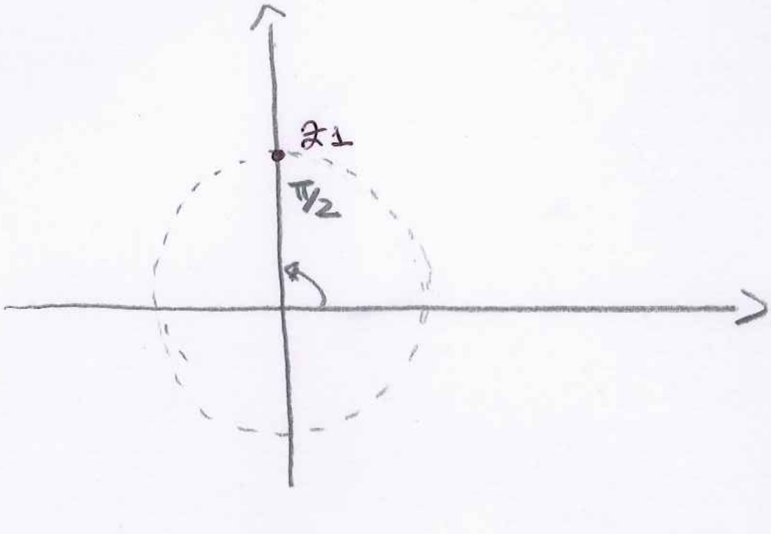
$$4z^4 - 1 = 0 \iff z^4 = \frac{1}{4}$$

Si applica la formula di De Moivre:

$$z_k = (\sqrt{2})^{-1}\left(\cos\frac{2k\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \underbrace{z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,i}, \quad z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,i$$

questa è l'unica soluzione con parte immaginaria non negativa



Esercizio: massimi e minimi vincolati per funzione in due variabili (B)

Determinare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = e^{(x+1)^2}\left(\frac{y^2}{2} - y\right)$$

limitatamente al quadrato Q di vertici $(0,0)$, $(0,2)$, $(-2,2)$ e $(-2,0)$.

Soluzione

La funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}^2$.
Poiché il quadrato Q è chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo assoluti su Q.

Si cercano prima eventuali punti stazionari interni a Q.

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2e^{(x+1)^2}(x+1)\left(\frac{y^2}{2} - y\right) = 0 \\ f_y(x,y) = e^{(x+1)^2}(y-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

L'unico punto stazionario è il punto $P(-1,1)$, che è interno a Q.
Le derivate seconde sono:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2e^{(x+1)^2}(2(x+1)^2+1)\left(\tfrac{y^2}{2} - y\right) \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 2(x+1)e^{(x+1)^2}(y-1) \\ f_{yy}(x,y) &= e^{(x+1)^2} \end{aligned}$$

e quindi il determinante della matrice Hessiana calcolata in P è

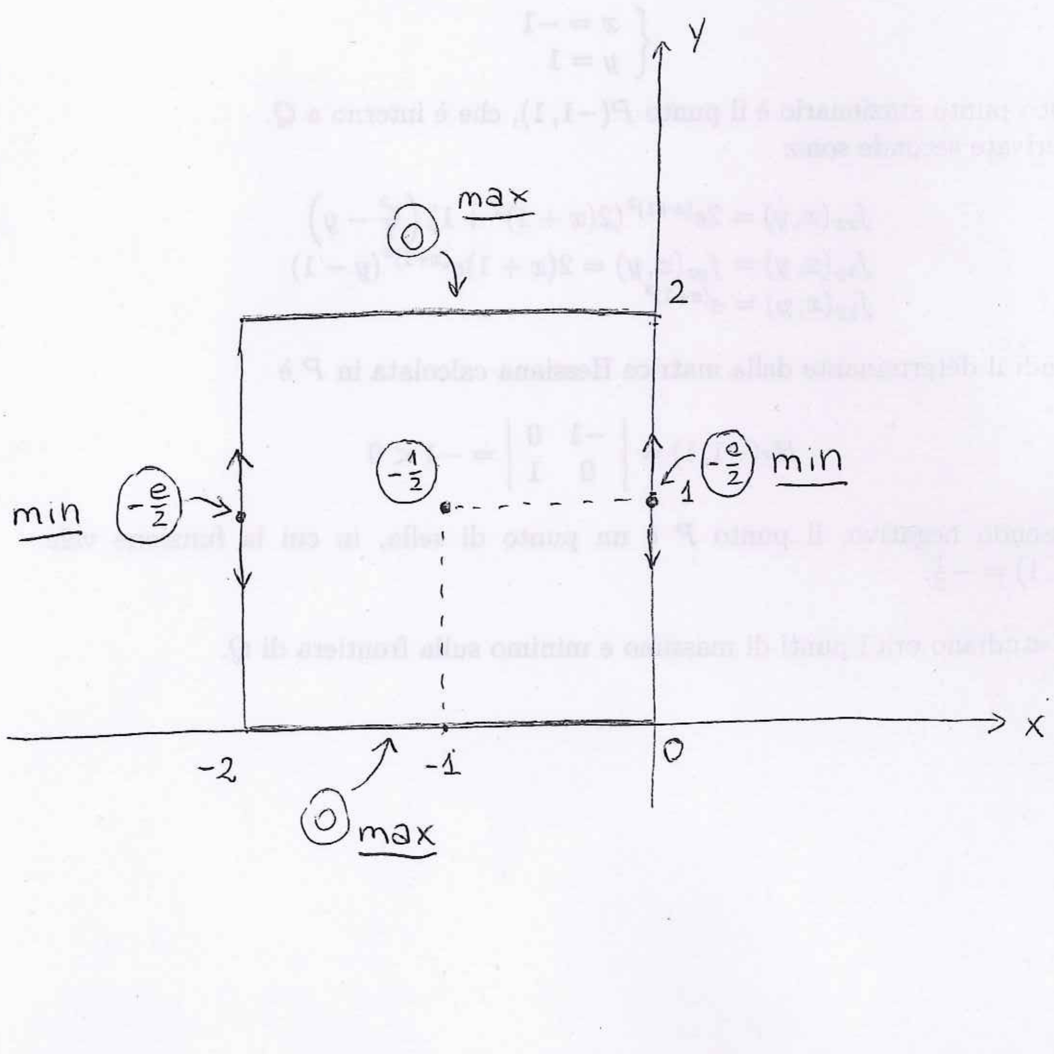
$$H_f(-1,1) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

ed essendo negativo, il punto P è un punto di sella, in cui la funzione vale $f(-1,1) = -\frac{1}{2}$.

Si studiano ora i punti di massimo e minimo sulla frontiera di Q.

- Segmento da $(0,0)$ a $(0,2)$: $\gamma_1(t) = (0,t)$, $t \in [0,2]$.
  $f|_{\gamma_1}(t) = e\left(\frac{t^2}{2} - t\right)$
  $f|'_{\gamma_1}(t) = e(t-1) = 0$ per $t = 1$, punto di minimo, in cui la funzione vale $f|_{\gamma_1}(1) = -\frac{e}{2}$.
  Agli estremi: $f|_{\gamma_1}(0) = 0$ e $f|_{\gamma_1}(2) = 0$.
- Segmento da $(-2,0)$ a $(-2,2)$: $\gamma_2(t) = (-2,t)$, $t \in [0,2]$.
  Stessa cosa.
- Segmento da $(-2,0)$ a $(0,0)$: $\gamma_3(t) = (t,0)$, $t \in [-2,0]$.
  $f|_{\gamma_3}(t) \equiv 0$.
- Segmento da $(-2,2)$ a $(0,2)$: $\gamma_4(t) = (t,2)$, $t \in [-2,0]$.
  $f|_{\gamma_4}(t) \equiv 0$.

Ricapitolando, i punti $(0,1)$ e $(-2,1)$ sono punti di minimo assoluto, mentre tutti i punti dei segmenti γ_3 e γ_4 sono punti di massimo assoluto di f su Q.

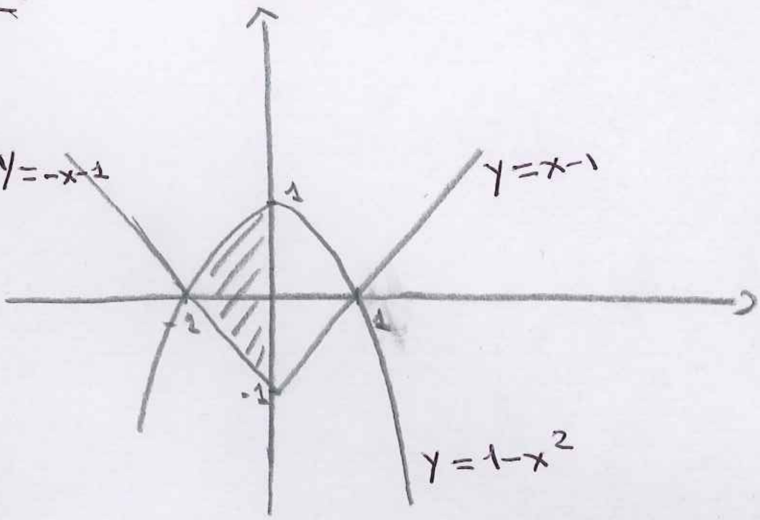


(B) Risolvere il seguente integrale

$$\iint_T xe^{x^2} e^{|y+x+1|}\,dx\,dy$$

dove $T = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|-1 \leq y \leq 1-x^2,\ x \leq 0 \}$

<u>Soluzione</u>



É un dominio normale rispetto all'asse x

$$\iint_T xe^{x^2} e^{|y+x+1|}\,dx\,dy = \int_{-1}^{0} dx \int_{-x-1}^{1-x^2} xe^{x^2} e^{|y+1+x|}\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{0} dx \int_{-x-1}^{1-x^2} xe^{x^2} e^{y+1+x}\,dy =$$

$$e^{|y+x+1|} = \begin{cases} e^{y+x+1} & \text{se } y \geq -x-1 \quad \text{sempre vero in } T \\ e^{-y-x-1} & \text{se } y < -x-1 \quad \text{mai in } T \end{cases}$$

$$= \int_{-1}^{0} xe^{x^2+x} \left[e^{y+1} \right]_{-x-1}^{1-x^2} dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} x e^{x^2+x} \left(e^{2-x^2} - e^{-x} \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(x e^{x+2} - xe^{x^2} \right) dx = \int_{-1}^{0} xe^{x+2} - \int_{-1}^{0} xe^{x^2}\,dx =$$

$$= xe^{x+2}\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^{x+2}\,dx - \frac{1}{2} e^{x^2}\Big|_{-1}^{0} =$$

$$= e - e^{x+2}\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^2 = e - e^2 + e - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{1}{2}$$

Esercizio: equazione di Bernoulli (B)

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{1}{3(x-4)}\, y(x) = \frac{4}{3x}\, y^4(x) \\ \\ y(1) = \frac{1}{\sqrt[3]{3\ln 3}} \end{cases}$$

Soluzione

L'equazione proposta è di Bernoulli con parametro $\alpha = 4$.
La soluzione stazionaria particolare $y \equiv 0$ non è soluzione del problema di Cauchy.
L'equazione è definita per $x \neq 0$ e $x \neq 4$ e poichè il punto iniziale $x_0 = 1$ è compreso tra 0 e 4, si cerca la soluzione nell'intervallo $I = (0,4)$.

Risolvendo l'equazione si ha, dividendo per y^4:

$$y'y^{-4} + \frac{1}{3(x-4)}\, y^{-3} = \frac{4}{3x}.$$

Cambio di variabile: $z = y^{-3}$ $\quad z' = -3y^{-4}y'$.
Si ottiene l'equazione lineare in z:

$$z' - \frac{1}{x-4}\, z = -\frac{4}{x}$$

Fattore integrante (utilizzato il fatto che $x \in I$):

$$e^{-\int \frac{1}{x-4}\,dx} = e^{-\ln|x-4|} = e^{-\ln(4-x)} = \frac{1}{4-x}.$$

Moltiplicando per il fattore integrante:

$$\left(z\,\frac{1}{4-x}\right)' = -\frac{4}{x}\,\frac{1}{4-x}$$

$$z(x) = (4-x)\left[\int \frac{4}{(x)(x-4)}\,dx + c\right] \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{x(x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} = \frac{Ax - 4A + Bx}{x(x-3)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -4A = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$z(x) = (4-x)\left[\int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4}\right) dx + c\right] \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$z(x) = (4-x)\left[-\ln|x| + \ln|x-4| + c\right] \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$z(x) = (4-x)\left[-\ln x + \ln(4-x) + c\right] \qquad c \in \mathbb{R} \quad (x \in I)$$

$$z(x) = (4-x)\left[\ln\left(\frac{4-x}{x}\right) + c\right] \qquad c \in \mathbb{R}$$

Tramite la trasformazione inversa $y(x) = z^{-\frac{1}{3}}(x)$ si ottiene:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(4-x)\left[\ln\left(\frac{4-x}{x}\right) + c\right]}} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Imponendo ora la condizione iniziale:

$$y(1) = \frac{1}{\sqrt[3]{3\ln 3}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{3\ln 3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3(\ln 3 + c)}} \qquad \Longrightarrow \qquad c = 0$$

e quindi la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(4-x)\ln\left(\frac{4-x}{x}\right)}}$$

che è definita in $(0,2) \cup (2,4)$ e dunque è soluzione locale in $(0,2)$.