**ANALISI MATEMATICA**
ING. CIVILE
**16/02/2012**
Prof.ssa M.R. Lancia - Prof.ssa A. Marchesiello - Prof.ssa S. Marconi

**<u>Testo A</u>**

Cognome ........................................... Nome ...........................................

Matricola ........................................... Anno di corso................................

**Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguiti e mettendo in evidenza ogni risposta.**

**1)** Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $a, b \in \mathbb{R}$, la continuità in $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\int_0^x (\sin t - t)\, dt}{x^\alpha} & x > 0 \\ \\ |ax| - b & x \le 0 \end{cases}$$

Studiare la derivabilità in $x = 0$ per $\alpha = 3$.

**2)** Calcolare l'area della regione piana sottesa dalla curva

$$y = \frac{2(2-x)\sqrt[6]{\ln(1+4x-x^2)}}{1+4x-x^2}$$

nel suo insieme di definizione.

**3)** Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left( \left( \frac{1}{x+1} + \ln(x+1) \right) e^{x+y},\ \ln(x+1)e^{x+y} \right)$$

stabilire se è conservativo; in caso affermativo determinare un potenziale $U(x,y)$ tale che $U(0,0) = 0$. Calcolare inoltre $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \tau\, ds$ ove $\gamma$ è l'arco di curva regolare di equazioni $x = t, y = t^2, t \in [0,1]$.

**4)** Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{(x-1)+(y-1)} - 1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} & (x,y) \ne (1,1) \\ \\ 0 & (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

stabilire se è continua in $(1,1)$. Dire per quali direzioni $\mathbf{r}$ esiste $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}(1,1)$.
*Facoltativo*: Scrivere se possibile l'equazione del piano tangente alla superficie in $(0,1)$.

**5)** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{\sin x \cot x}{1-\sin x}\ y - \frac{2\sin x \cot x}{1-\sin x} \\ \\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \end{cases}$$

Stabilire se la soluzione è limitata.

# ANALISI MATEMATICA

ING. CIVILE

**16/02/2012**

Prof.ssa M.R. Lancia - Prof.ssa A. Marchesiello - Prof.ssa S. Marconi

**Testo B**

Cognome ........................................ Nome ........................................

Matricola ........................................ Anno di corso................................

**Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguiti e mettendo in evidenza ogni risposta.**

**1)** Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $a, b \in \mathbb{R}$, la continuità in $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x (e^t - 1 - t)\, dt}{x^\alpha} & x > 0 \\ \\ -|(a-1)x| + b & x \le 0 \end{cases}$$

Studiare la derivabilità in $x = 0$ per $\alpha = 2$.

**2)** Calcolare l'area della regione piana sottesa dalla curva

$$y = \frac{2(3-x)\sqrt[4]{\ln(1+6x-x^2)}}{1+6x-x^2}$$

nel suo insieme di definizione.

**3)** Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left( \frac{1}{x+1} \sin(x+y) + \ln(x+1)\cos(x+y),\ \ln(x+1)\cos(x+y) \right)$$

stabilire se è conservativo; in caso affermativo determinare un potenziale $U(x, y)$ tale che $U(0, 0) = 0$. Calcolare inoltre $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \tau\, ds$ ove $\gamma$ è l'arco di curva regolare di equazioni $x = t, y = t^3, t \in [0, 1]$.

**4)** Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\arctan((x-1)+(y-1))}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} & (x,y) \ne (1,1) \\ \\ 0 & (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

stabilire se è continua in $(1, 1)$. Dire per quali direzioni $\mathbf{r}$ esiste $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}(1, 1)$.
*Facoltativo*: Scrivere se possibile l'equazione del piano tangente alla superficie in $(0, 1)$.

**5)** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{\tan x \cos x}{\cos x + 1}\, y - \frac{3 \tan x \cos x}{\cos x + 1} \\ \\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5 \end{cases}$$

Stabilire se la soluzione è limitata.

# ANALISI MATEMATICA

ING. CIVILE

**16/02/2012**

Prof.ssa M.R. Lancia - Prof.ssa A. Marchesiello - Prof.ssa S. Marconi

**Testo C**

Cognome ........................................... Nome ...........................................

Matricola ........................................... Anno di corso.................................

**Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguiti e mettendo in evidenza ogni risposta.**

**1)** Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $a, b \in \mathbb{R}$, la continuità in $x = 1$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\int_1^x (\sin(t-1)-(t-1))\,dt}{(x-1)^\alpha} & x > 1 \\ \\ |a(x-1)| - b & x \leq 1 \end{cases}$$

Studiare la derivabilità in $x = 1$ per $\alpha = 3$.

**2)** Calcolare l'area della regione piana sottesa dalla curva

$$y = -\frac{2(x+2)\sqrt[6]{\ln(1-4x-x^2)}}{1-4x-x^2}$$

nel suo insieme di definizione.

**3)** Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{1}{x-1}e^{(x+y)} + \ln(1-x)e^{x+y},\ \ln(1-x)e^{(x+y)}\right)$$

stabilire se è conservativo; in caso affermativo determinare un potenziale $U(x,y)$ tale che $U(0,0) = 0$. Calcolare inoltre $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\tau\, ds$ ove $\gamma$ è l'arco di curva regolare di equazioni $x = t, y = t^3, t \in [0, \frac{1}{2}]$.

**4)** Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{(x+1)+(y+1)}-1}{\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}} & (x,y) \neq (-1,-1) \\ \\ 0 & (x,y) = (-1,-1) \end{cases}$$

stabilire se è continua in $(-1,-1)$. Dire per quali direzioni $\mathbf{r}$ esiste $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}(-1,-1)$.
*Facoltativo*: Scrivere se possibile l'equazione del piano tangente alla superficie in $(0,-1)$.

**5)** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{\cot(x-1)\sin(x-1)}{1-\sin(x-1)}\ y - \frac{2\cot(x-1)\sin(x-1)}{1-\sin(x-1)} \\ \\ y\left(1+\frac{\pi}{3}\right) = 4 \end{cases}$$

Stabilire se la soluzione è limitata.

# ANALISI MATEMATICA

ING. CIVILE

**16/02/2012**

Prof.ssa M.R. Lancia - Prof.ssa A. Marchesiello - Prof.ssa S. Marconi

**Testo D**

Cognome ........................................... Nome ...........................................

Matricola ........................................... Anno di corso.................................

**Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguiti e mettendo in evidenza ogni risposta.**

**1)** Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $a, b \in \mathbb{R}$, la continuità in $x = 1$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\int_1^x (e^{(t-1)} - 1 - (t-1))\, dt}{(x-1)^\alpha} & x > 1 \\ \\ -|(a-1)(x-1)| + b & x \leq 1 \end{cases}$$

Studiare la derivabilità in $x = 1$ per $\alpha = 2$.

**2)** Calcolare l'area della regione piana sottesa dalla curva

$$y = -\frac{2(x+3)\sqrt[4]{\ln(1-6x-x^2)}}{1-6x-x^2}$$

nel suo insieme di definizione.

**3)** Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left( \frac{1}{x-1}\cos(x+y) - \ln(1-x)\sin(x+y),\ -\ln(1-x)\sin(x+y) \right)$$

stabilire se è conservativo; in caso affermativo determinare un potenziale $U(x,y)$ tale che $U(0,0) = 0$. Calcolare inoltre $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \tau\, ds$ ove $\gamma$ è l'arco di curva regolare di equazioni $x = t, y = t^2, t \in [-1, 0]$.

**4)** Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\arctan((x+1)+(y+1))}{\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}} & (x,y) \neq (-1,-1) \\ \\ 0 & (x,y) = (-1,-1) \end{cases}$$

stabilire se è continua in $(-1,-1)$. Dire per quali direzioni $\mathbf{r}$ esiste $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}(-1,-1)$.
*Facoltativo*: Scrivere se possibile l'equazione del piano tangente alla superficie in $(0,-1)$.

**5)** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{\cos(x-1)\tan(x-1)}{1+\cos(x-1)}\, y - \frac{3\cos(x-1)\tan(x-1)}{1+\cos(x-1)} \\ \\ y\left(1 + \frac{\pi}{6}\right) = 5 \end{cases}$$

Stabilire se la soluzione è limitata.